加法的分割数 $p(n)$ の表示について

大塚香代

On expression of $p(n)$, the number of partition of n

KAYO OTUKA

正整数 n の加法的分割数 $p(n)$ については

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\frac{e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}$$

を主項とする Hardy と Ramanujan による漸近式があるが[1)2)3)]，これとは違った方面から初等的に $p(n)$ を分析することにより一つの漸化式を求めてみた。簡単の為，次のように規約する。

i) 特に $p(0)=1$ と定義する。

ii) a に含まれる最大の整数を $[a]$，a を含む最小の整数を $[\![a]\!]$ で表わす。

iii) $\underbrace{a_1+a_1+\cdots\cdots+}_{m-1}a_1+a_2$ $(a_1 \geqq a_2)$ の形の整数を更に細分する分割数の個数を $p_m(a_1, a_2)$ で表わす。

補助定理 1 $\quad p_2(a_1, a_2)=p(a_1+a_2)-\sum_{k=0}^{a_2-1}p(k)$

証明.

$$\left.\begin{array}{l}
(a_1+a_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p(0)\\
(a_1+a_2-1)+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p(1)\\
\left.\begin{array}{l}(a_1+a_2-2)+2\cdots\cdots\\(a_1+a_2-2)+1+1\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots p(2)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left.\begin{array}{l}(a_1+1)+(a_2-1)\cdots\cdots\\(a_1+1)+(a_2-2)+1\cdots\cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_1+1)+1+\cdots\cdots+1\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots p(a_2-1)\\
p_2(a_1,a_2)\left\{\begin{array}{l}a_1+a_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1+(a_2-1)+1\cdots\cdots\cdots\cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\1+1+\cdots\cdots+1\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.
\end{array}\right\} p(a_1+a_2)$$

補助定理 2 $\quad p_3(a_1, a_2)=p(2a_1+a_2)-\sum_{k=0}^{\left[\frac{2a_1+a_2}{2}\right]}p(k)-\sum_{i}p_2\left(\left[\!\left[\frac{2a_1+a_2}{2}-i\right]\!\right], 2a_1+a_2-2\left[\!\left[\frac{2a_1+a_2}{2}-i\right]\!\right]\right)$

$\left(\sum_i\right.$ は 1 から $\left[\!\left[\frac{2a_1+a_2}{2}-i\right]\!\right]=a_1+1$ を満足する i までの summation を示す。$\left.\right)$

註 この論文の要旨は昭和32年5月16日 日本数学会年会において発表した。

証明.

$$
p(2a_1+a_2)\left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
(2a_1+a_2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ p(0)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left.\begin{array}{l}
[\![\frac{2a_1+a_2}{2}]\!]+\left[\frac{2a_1+a_2}{2}\right]\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[\![\frac{2a_1+a_2}{2}]\!]+1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right\}\cdots\cdots\ p\left(\left[\frac{2a_1+a_2}{2}\right]\right)
\end{array}\right\}\sum_{k=0}^{\left[\frac{2a_1+a_2}{2}\right]} p(k)\\
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
[\![\frac{2a_1+a_2}{2}-1]\!]+[\![\frac{2a_1+a_2}{2}-1]\!]+(2a_1+a_2-2[\![\frac{2a_1+a_2}{2}-1]\!])\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[\![\frac{2a_1+a_2}{2}-1]\!]+1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right\}p_2\left([\![\frac{2a_1+a_2}{2}-1]\!],\ 2a_1+a_2-2[\![\frac{2a_1+a_2}{2}-1]\!]\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left.\begin{array}{l}
(a_1+1)+(a_1+1)+(a_2-2)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(a_1+1)+1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right\}p_2(a_1+1,\ a_2-2)
\end{array}\right\}\sum_i p_2\\
p_3(a_1,a_2)\left\{\begin{array}{l}
a_1+a_1+a_2\\
\cdots\cdots\cdots\\
1+\cdot\cdot+1
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

助　理 3　$p_4(a_1,a_2)=p(3a_1+a_2)-\sum_{k=0}^{\left[\frac{3a_1+a_2}{2}\right]}p(\mathrm{k})-\sum_i p_2\left([\![\frac{3a_1+a_2}{2}-\mathrm{i}]\!],\ 3a_1+a_2-2[\![\frac{3a_1+a_2}{2}-\mathrm{i}]\!]\right)$

$$-\sum_j p_3\left([\![\frac{3a_1+a_2}{3}-\mathrm{j}]\!],\ 3a_1+a_2-3[\![\frac{3a_1+a_2}{3}-\mathrm{j}]\!]\right)$$

$\left(\sum_i(\sum_j)\right.$ は1より $[\![\frac{3a_1+a_2}{2}-\mathrm{i}]\!]=[\![\frac{3a_1+a_2}{3}]\!]\left([\![\frac{3a_1+a_2}{3}-\mathrm{j}]\!]=a_1+1\right)$ を満足する i(j) までの summationを意味する。$\left.\right)$

証明.

$$
p(3a_1+a_2)\left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
(3a_1+a_2)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[\![\frac{3a_1+a_2}{2}]\!]+1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right\}\sum_{k=0}^{\left[\frac{1+2}{2}\right]}p(\mathrm{k})\\
\left.\begin{array}{l}
[\![\frac{3a_1+a_2}{2}-1]\!]+[\![\frac{3a_1+a_2}{2}-1]\!]+\left(3a_1+a_2-2[\![\frac{3a_1+a_2}{2}-1]\!]\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[\![\frac{3a_1+a_2}{3}]\!]+1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right\}\sum_i p_2\\
\left.\begin{array}{l}
[\![\frac{3a_1+a_2}{3}-1]\!]+[\![\frac{3a_1+a_2}{3}-1]\!]+[\![\frac{3a_1+a_2}{3}-1]\!]+\left(3a_1+a_2-3[\![\frac{3a_1+a_2}{3}-1]\!]\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(a_1+1)+1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right\}\sum_j p_3\\
p_4(a_1,\ a_2)\left\{\begin{array}{l}
a_1+a_1+a_1+a_2\\
\cdots\cdots\cdots\\
1+\cdots\cdots+1
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

以下同様の推論により，次の定理が得られる。

定　理　$p_m(a_1,a_2)=p(\overline{m-1}a_1+a_2)-\sum_{k=0}^{\left[\frac{\overline{m-1}a_1+a_2}{2}\right]}p(\mathrm{k})-\sum_{k=2}^{m-1}\sum_i p_k\left([\![\frac{\overline{m-1}a_1+a_2}{k}-\mathrm{i}]\!],\ \overline{m-1}a_1+a_2-\mathrm{k}[\![\frac{\overline{m-1}a_1+a_2}{k}-\mathrm{i}]\!]\right)$

$\Big($ $\sum_{i}$ は 1 より $\left\llbracket \frac{\overline{m-1}a_1+a_2}{k}-i\right\rrbracket=\left\llbracket\frac{\overline{m-1}a_1+a_2}{k+1}\right\rrbracket$ を満足する i までの summation を意味する。$\Big)$

証明.　$(m-1)a_1+a_2=r$ とおく。

$$
p(r)\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}(r)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \llbracket\frac{r}{2}\rrbracket+1+\cdots\cdots+1\end{array}\right\}\sum_{k=}^{[\frac{r}{2}]}p(k)\\
\left.\begin{array}{l}\llbracket\frac{r}{2}-1\rrbracket+\llbracket\frac{r}{2}-1\rrbracket+\left(r-2\llbracket\frac{r}{2}-1\rrbracket\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \llbracket\frac{r}{3}\rrbracket+1+\cdots\cdots+1\end{array}\right\}\sum p_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left.\llbracket\frac{r}{m-1}-1\rrbracket+\cdots\cdots+\llbracket\frac{r}{m-1}-1\rrbracket+\left(r-\overline{m-1}\llbracket\frac{r}{m-1}-1\rrbracket\right)\right\}\sum p_{m-1}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}\sum_{k=2}^{m-1}\sum_{i}p_k\\
p_m(a_1,a_2)\left\{\begin{array}{l}a_1+a_1+\cdots\cdots+a_1+a_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1+\cdots\cdots+1\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

この定理より直ちに次の本定理が得られる。

本定理.　$p(n)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}p(k)+\sum_{k=2}^{[\![\frac{n}{2}-1]\!]}\sum_{i}p_k\left(\llbracket\frac{n}{k}-i\rrbracket,\ n-k\llbracket\frac{n}{k}-i\rrbracket\right)+1$

($\sum_{i}$ は 1 から $\llbracket\frac{n}{k}-i\rrbracket=\llbracket\frac{n}{k+1}\rrbracket$を満足するまでの i についての summation を意味する。)

証明.

$$
p(n)\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}(n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \llbracket\frac{n}{2}\rrbracket+1+\cdots\cdots+1\end{array}\right\}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}p(k)\\
\left.\begin{array}{l}\llbracket\frac{n}{2}-1\rrbracket+\llbracket\frac{n}{2}-1\rrbracket+\left(n-2\llbracket\frac{n}{2}-1\rrbracket\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \llbracket\frac{n}{3}\rrbracket+1+\cdots\cdots+1\end{array}\right\}\sum_{i_1}p_2\llbracket\frac{n}{2}-i_1\rrbracket,\ n-2\llbracket\frac{n}{2}-i_1\rrbracket)\\
\left.\begin{array}{l}\llbracket\frac{n}{3}-1\rrbracket+\llbracket\frac{n}{3}-1\rrbracket+\llbracket\frac{n}{3}-1\rrbracket+\left(n-3\llbracket\frac{n}{3}-1\rrbracket\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \llbracket\frac{n}{4}\rrbracket+1+\cdots\cdots+1\end{array}\right\}\sum_{i_2}p_3\left(\llbracket\frac{n}{3}-i_2\rrbracket,\ n-3\llbracket\frac{n}{3}-i_2\rrbracket\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left.\begin{array}{l}\llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket+\llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket+\cdots\cdots+\llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket+\left(n-\llbracket\frac{n}{2}-1\rrbracket\llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket+1+\cdots\cdots+1\\ 1+\cdots\cdots+1\end{array}\right\}p_{\llbracket\frac{n}{2}-1\rrbracket}\left(\llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket,\ n-\llbracket\frac{n}{2}-1\rrbracket\llbracket\frac{n}{\llbracket\frac{n}{2}\rrbracket}\rrbracket\right)
\end{array}\right.
$$

上の図より明らかなように

$$p(n)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}p(k)+\sum_{i_1}p_2\left(\left\llbracket\frac{n}{2}-i_1\right\rrbracket,\ n-2\left\llbracket\frac{n}{2}-i_1\right\rrbracket\right)+\sum_{i_2}p_3\left(\left\llbracket\frac{n}{3}-i_2\right\rrbracket,\ n-3\left\llbracket\frac{n}{3}-i_2\right\rrbracket\right)+\cdots\cdots$$

$$+p_{\left\llbracket\frac{n}{2}-1\right\rrbracket}\left(\left\llbracket\frac{n}{\left\llbracket\frac{n}{2}\right\rrbracket}\right\rrbracket,\ n-\left\llbracket\frac{n}{2}-1\right\rrbracket\left\llbracket\frac{n}{\left\llbracket\frac{n}{2}\right\rrbracket}\right\rrbracket\right)+1$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}p(k)+\sum_{k=2}^{\left\llbracket\frac{n}{2}-1\right\rrbracket}\sum_{i}p_k\left(\left\llbracket\frac{n}{k}-i\right\rrbracket,\ n-k\left\llbracket\frac{n}{k}-i\right\rrbracket\right)+1.$$

上に求められた $p(n)$ の式はかなり複雑ではあるが，これによって順次に $p(n)$ の正確な数値を求めることが出来る。今後この式より $p(n)$ の解析的な性質 (Ramanujan 予想，その他―現在は殆んど知られていない―)を導き出したいと思っている。 n にいろいろな条件を与えて右辺の項をなるべく少くし，残ったものの中から普遍的な性質を導き出すことが出来れば，これが正確な数値を与える式であることから Ramanujan 予想に対する解決，或はそれに近い何等かの $p(n)$ の解析的性質を与えるものになると思われるが今の所良い結果は出ていない。 又これと同じ様な展開式をもつ函数 (初等函数でも楕円函数でも，その他何でもよい) が見つけられると今後の理論は面白く進展すると考えられるが，残念乍らまだ見当がついていない。

文　　献

1) G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **17**, 75 (1918)
2) H. Gupta, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **39**, 142 (1935), **42**, 546 (1937)
3) 池原止才夫，初等解析的整数論，河出　(1949)

(1957 年 6 月 29 日受理)