垂足三角形の極小性質について

中　桐　胤　長

Eine Minimaleigenschaft des Höhenfußpunktdreiecks.

Tanenaga Nakagiri

Die Aufgabe, mit der wir uns hier eigentlich beschäftigen wollen, ist die einem gegebenen spitzwinkligen Dreieck ABC ein Dreieck LMN einzubeschreiben, dessen Umfang möglichst klein ist. Die Behauptung ist, daß das „Höhenfußpunktdreieck“, d. h. das aus den Fußpunkten der drei Höhen des Dreiecks ABC gebildete Dreieck LMN einen kleineren Umfang hat als jedes andere Dreieck PQR, das ABC eingeschrieben ist.

この小論の目的は“鋭角三角形に内接する三角形のうち，周囲の最短なものを求める”ことである．そしてその結論は“垂足三角形即ち各項点からその対辺に下した垂線の足を結ぶ三角形の周囲が他のどんな内接三角形の周囲よりも短い”のである．

この証明は既に H. A. Schwarz [1] 並に L. Fejér [2] 等によって極めて巧妙になされているのであるが，筆者は，二点を結ぶ線のうち最短なものは直線であることと，図形の鏡像を作ることを根本原理として，より初等的な別の解答を試みたいと思う．

これを証明するには，二等辺三角形についての一つの補助定理が必要である．

補助定理　二辺の和とその挾む角とが与えられた三角形のうち，最小の第三辺をもつものは，二等辺三角形である．

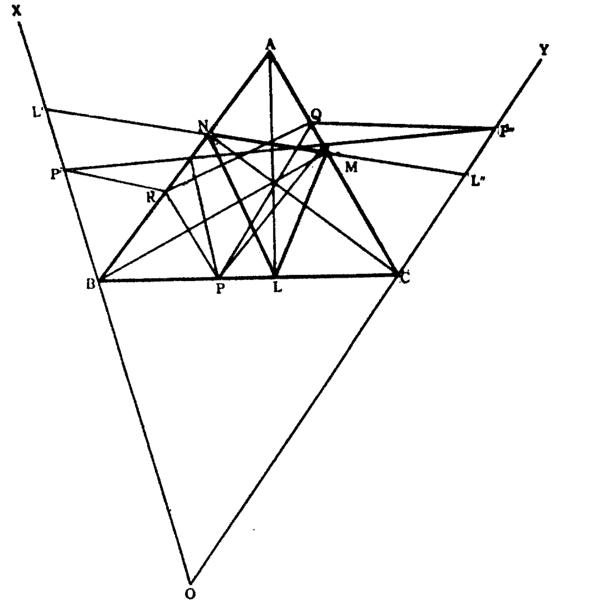
証明　Aを頂点とする二等辺三角形において，辺AB上に任意の点Dをとり，辺ACの延長上に点Eをとり，$DB=CE$ならしめるとき，$BC<DE$なることを示せばよい．B, Eを結べば三角形BDE, EBCにおいてBEは共通，$DB=CE$ 且つ角$DBE>$角BECであるから，余弦定理により$BC<DE$となる．

本定理の証明　与えられた鋭角三角形ABCに内接する任意の三角形をPQRとし，PはBC上に，QはCA上に，RはAB上にあるものとする．今，Pの直線AB及びACに関する対称点をそれぞれP'及びP''とすると，三角形PQRの周囲は折線$P'RQP''$に等しい．よってPを固定しておいて，QとRとをそれぞれの辺上に動かしてみると，折線$P'RQP''$は固定した二点P', P''の間に張られ，常にPQRの周長に等しい．所でP'とP''とを結ぶ線のうちP'とP''とを結ぶ直線が最短であるから，直線$P'P''$はPを頂点とする内接三角形の周のうち最短なものを表わす．

次に，Pを種々に変えたとき出来るこの最短の周の三角形を比較して，その中で周の最短なものを見つければ，それが内接三角形のうちで周の最短なものに相違ない．即ち，問題は$P'P''$が最短なるためにはPはどこにあるべきかということになった．

所がPの鏡像P', P''はどんな線上にあるかというに，BCのAB, ACに関する鏡像をそれぞれBX, CYとすれば，三角形ABCは鋭角三角形であるから，二直線BX, CYはBCに関してAと反対の側で必ず交わる．この交点をOと名づける．そうするとP', P''はこのOX, OY上にあって，しかもOP', OP''の間には常に

$$\begin{aligned}OP'+OP''&=OB+BP'+OC+CP''\\&=OB+BP+OC+CP\\&=OB+OC+BC\ (\text{一定})\end{aligned}$$



という関係がある．即ち，三角形 $OP'P''$ は二辺の和が一定で且つ頂角が一定な三角形である．従って補助定理により，このような三角形 $OP'P''$ のうち第三辺 $P'P''$ の最短なものは二等辺三角形である．即ち BX，CY 上にそれぞれ点 L'，L'' をとり

$$OL'=OL''=\frac{1}{2}(OB+OC+BC)$$

ならしめれば，$L'L''$ が最短となる．従って $L'L''$ と AB，AC との交点をそれぞれ N，M とし，AB に関する L' の鏡像を L として三角形 LMN を作れば，これが求める周囲の最短な三角形である．そして二等辺三角形 $OL'L''$ の性質と，鏡像の性質とから，角 BLN，角 CLM；角 CML，角 AMN；角 ANM，角 BNL がそれぞれ相等しい．よって三角形 LMN は垂足三角形である．

文　献

1) Rademacher-Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, (2 Auflage) S. 19 (1933).

2) 〃 ibid., S. 23.

(1953年1月10日受理)