京都府立大学学術報告（理学・生活科学）第44号　A系列 p.1〜8（1993年11月）

Green 関数の存在する$\mathfrak{P}$－調和空間上の収束性について

村　澤　忠　司

On the Convergence Property on $\mathfrak{P}$－Harmonic Spaces with Green Function

TADASHI MURAZAWA

Abstract

On the harmonic space $(X, \mathfrak{U})$ with a Green function, let us consider a sequence $\{\mu_n\}$ of non-negative measures μ_n with compact support, which belongs to the dual S^* of S in the sence of H-cone [3], where S denotes the convex cone of non-negative superharmonic functions on $(X, \mathfrak{U})$. Then we construct the inequality, i.e., for a relatively compact open set U and a compact set K, there are a integer i_0 and a non-negative real number M such that $\sup_{x\in K} \widehat{R}^{CU} u(x) \leqq M \sum_{i=1}^{i_0} \mu_i(u)$ for every $u \in S$, where $\mu_i \in S^*$ is universally continuous for all $i \in \boldsymbol{N}$, $K \subset U$.

In conclusion, we give the characterization of Doob convergence property by using this inequality.

(Received July 23, 1993)

0. はじめに

調和空間$(X, \mathfrak{U})$において，Xの任意の開集合U上の調和関数h_nの増加列$\{h_n\}$を考える．このとき，$\{h_n\}$の極限関数hがUの稠密な集合上で有限ならば，hはU上において調和であるとき，調和空間$(X, \mathfrak{U})$上でDoob収束性が成り立つと言われている．この性質は，一般の調和空間においては成立しない．

1956年，Doob〔4〕は調和空間上に，この収束性の概念を導入した．たとえば，n次元ユークリッド空間R^nにおいて，ラプラシアン

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

に関する調和関数の族 $\mathcal{H} = \{u \in C^2(R^n) \mid R^n$上で$\Delta u = 0\}$による組$(R^n, \mathcal{H})$は調和空間をなす．ただし$C^2(R^n)$は$R^n$上で2階連続微分可能な関数からなる族を示す．このとき，組$(R^n, \mathcal{H})$において，上述のDoob収束性が満たされる．しかし，点$(x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$上における微分作用素

$$\Box = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

に対する調和関数$u : \Box u = 0$, の族$\mathcal{H}$によってきまる調和空間$(X, \mathfrak{U})$（文献〔3〕）に対してはもはやDoob収束性は成立しない．

一般に，調和空間$(X, \mathfrak{U})$の性質を考察する上において，このDoob収束性は重要な役割を演ずる．たとえば，1974年Janssen〔7〕は，ある種の条件ものとで，調和空間$(X, \mathfrak{U})$がDoob収束性をみたせば，Green関数が存在することを証明した．さらに，1979年にSchirmeier〔10〕は一定の条件のもとで，Green関数が存在すれば，Doob収束性が成立することを得た．我々は，Boboc-Bucur-Cornea〔2〕の意味でのH－錘の概念を利用することにより，$\mathfrak{P}$－調和空間$(X, \mathfrak{U})$上において，Green関数の存在とDoob収束性との関係について考察してみたい．この結果は上記のSchirmeier〔10〕の結果の別証を与えるものでもある．

京都府立大学生活科学部応用数学教室
Department of Applied Mathematics, Faculty of Living Science, Kyoto Prefectural University

1. 記号と定義

組 $(X, \mathfrak{U})$ は，可算基をもつ局所コンパクトな Hausdonff 空間 X と X 上で定義された非負の下半連続な関数の全体からなる族 $\mathfrak{U}$ の組からなる，Constantinescu-Cornea〔3〕の意味での調和空間をなすものである．特に，$(X, \mathfrak{U})$ には X の各点で正になるポテンシャル p の存在するものと仮定する．このとき $(X, \mathfrak{U})$ は $\mathfrak{P}$－調和空間と言われる．さらに，この報告書全体を通して，定数関数 1 は $\mathfrak{U}$ に属するものとする．また，$\mathfrak{P}$－調和空間 $(X, \mathfrak{U})$ には，次の Green 関数の存在を仮定する：$X \times X$ 上の 2 変数の関数 $k(x, y) : X \times X \to [0, \infty]$ は次の条件

① $X \times X$ 上の 2 変数の関数として，$k(x, y)$ は下半連続である．且つ，対角線 $\{x=y\}$ 上を除いて連続である，

② 各点 $y \in X$ に対して，関数 $x \to k(x, y)$ は，ポテンシャルをなし，集合 $\{y\}$ の補集合 $C\{y\}$ では調和である，

③ 任意の有限な連続ポテンシャル p に対して，常に $p(x)=\int k(x, y)\, d\mu(y)$ となる非負の測度 μ が存在する，

を満たすとき，Green 関数と言われる．

例えば，調和空間上にこのような Green 関数の存在については，文献〔7〕を参照されたい．

次の記号を使用する：

$\boldsymbol{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$, $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $\boldsymbol{J} \subset \boldsymbol{N}$,

R＝実数の全体, $R_+=\{x \in R \mid x \geqq 0\}$,

$C=C(X)$ は X 上の連続関数の全体からなる集合,

$S(f)$ は f の台を示す．$\overline{\{f \neq 0\}}$,

$C_c=\{f \in C \mid S(f)$ がコンパクト$\}$,

$C_0=\{f \in C \mid \lim_{x \to \infty} f(x)=0\}$,

(x, ϕ) は X の任意の点 x と関数 $\phi \in C_c$ の組，ただし $x \notin S(\phi)$,

$\upsilon(X)$ は X の相対コンパクト開集合の族,

$\upsilon_x=\{V \in \upsilon(X) \mid x \in V\}$,

$s\text{-}supp\,(p)$ はポテンシャル p の優調和な台，つまり，ポテンシャル p が調和である集合の補集合,

$M^+(X)$ は X 上のすべての正の *Radon* 測度からなる集合,

$M_K^+(X)=\{\mu \in M^+(X) \mid supp\,(\mu)$ がコンパクト$\}$，ただし $supp\,(\mu)$ は測度 μ の台を示す,

$\vee E$ は順序 $\leqq$ に関する集合 E の上限,

$\wedge E$ は順序 $\leqq$ に関する集合 E の下限,

$u \vee v = \vee(u, v)$, $u \wedge v = \wedge(u, v)$,

$u \mid U$ は関数 u の U 上への制限,

$\mu \mid U$ は測度 μ の U 上への制限,

ε_x は点 x 上の *Dirac* 測度,

ε_x^{CU} は X の点 x の *Dirac* 測度 ε_x の開集合 U の補集合 CU 上への掃散測度,

$\check{f}=\limsup f$, $\hat{f}=\liminf f$

関数の集合として次の記号を使う．

$\mathfrak{U}$：X 上の非負の下半連続関数の全体からなる凸錘．

$\mathcal{S}^+$：調和空間 $(X, \mathfrak{U})$ 上の非負の優調和関数の全体からなる凸錘．

$\mathcal{H}=\mathcal{S}^+ \cap (-\mathcal{S}^+)$,

$\mathfrak{P}$：X 上の連続ポテンシャルの全体からなる凸錘．

$S=\{u \in \mathfrak{U} \mid$ 集合 $[u<\infty]$ は細位相に関して稠密$\}$

S^*：S の H－錘としての共役（〔2〕）

$S^{**}=(S^*)^*$

$S_0=\{u \in S \mid u$ は X 上で〔2〕の意味で，いたる所連続 (*universally continuous*) な関数$\}$

なお，この報告書の中において使用している他の言葉や記号の内で，調和空間に関連するものは文献〔3〕に，H－錘に関連するものは文献〔2〕に従った．

2. H－錘 S の性質と測度の構成

$\mathfrak{P}$－調和空間 $(X, \mathfrak{U})$ 上における非負の優調和関数の成す凸錘 $\mathcal{S}^+$ と集合 S とは一致している．さらに，集合 S に関して次の性質が成り立つことが知られている (Murazawa〔11〕, Boboc-Bucur-Cornea〔2〕参照)．

命題 1．凸錘 S は集合 X 上で関数の標準 H－錘 (*a standard H-cone of functions*) を成し，また集合 X は疑似飽和 (*nearly saturate*) を成す．

系 2．S^{**} と S とは同形 (*isomonphic*) である．

S^* と S 上に次のような位相を定義する．

任意の元 $s \in S$ に対して，写像：

$$S^* \ni \mu \to \mu(s)$$

を連続にする最も粗な位相を S^* 上の自然位相 (*natural topology*) という，また各 $\mu \in S_0^*$ に対して，写像：

$$S \ni s \to \tilde{s}(\mu)$$

を連続にする最も粗な位相を S 上の τ－自然位相 (τ-*natural topology*) ということにしよう．ただし $\tilde{s} : S^* \to R^+$ は $\tilde{s}(\mu)=\mu(s)$ によって定義される．

今，次の方法で測度を構成しよう．

X 上の任意の有限な関数 $\phi \in C_c(X)$ と点 $x \in X$，ただし $x \notin S(\phi)$ との組 (x, ϕ) を取る．

各 $v \in \mathfrak{U}$ に対して

$$v\phi(x)=\frac{1}{\sup\phi}\int_0^{\sup\phi} R^{\{\phi>\alpha\}}v(x)\, d\alpha$$

を定義する．ただし任意の実数αについて

$$\{\phi>\alpha\}:=\{x\in X \mid \phi(x)>\alpha\},$$

また，$R^{\{\phi>\alpha\}}v:=\inf\{u\in\mathfrak{U}\mid u\geqq v \text{ on } \{\phi>\alpha\}\}$.
このとき，$v\phi\in\mathfrak{U}$ かつ $v\phi\leqq v$ である．
さらに，任意の元 $v\in\mathfrak{U}$ に対して，X 上の正の測度 ε_x^{ϕ} が存在し，

$$\varepsilon_x^{\phi}(v)=\int v d\varepsilon_x^{\phi}=v\phi(x)$$

を満し，且つ，その測度としての台 $supp(\varepsilon_x^{\phi})$ は

$$supp(\varepsilon_x^{\phi})\subset S(\phi)$$

を満す．この測度ε_x^{ϕ}はX上の Mokobodzki の測度〔9〕と呼ばれている．
ここで，もしvとして$k_y(=k(\cdot,y))$をとるならば，

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{\phi}(k_y)&=\int k_y(z)\ d\varepsilon_x^{\phi}(z)\\&=\int k_z^*(y)\ d\varepsilon_x^{\phi}(z)\\&=k^*\varepsilon_x^{\phi}(y)\end{aligned}$$

と書くことができる．ただし $k_y(x)=k(x,y)=k^*(y,x)=k_x^*(y)$ を意味する．

次の結果は，上記の測度ε_x^{ϕ}に関するよく知られた性質である．

補題3 （Maagli〔8〕命題2） X上のコンパクトな台$S(\phi)$をもった有限な連続関数ϕと$S(\phi)$に含まれないXの任意の点xとの組(x,ϕ)に対して，関数 $x\to k^*\varepsilon_x^{\phi}$ はX上で連続である．

命題4．X上に次の性質をもつ非負の測度λが存在する：

(a) $\lambda(x)<\infty$,

(b) $k^*\lambda\in C(X)$ 且つ X 上$k^*\lambda>0$.

ただし $k^*\lambda(y)=\int k^*(x,y)\,d\lambda(x)$ を表す．

（証明） 組(x,ϕ)に関する測度の構成と補題3から，次の結果をうる．組(x,ϕ)に対して，非負の測度ε_x^{ϕ}が存在し，各$v\in\mathfrak{U}$に対して，

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{\phi}(v)&=\int v d\varepsilon_x^{\phi}\\&=\frac{1}{\sup\phi}\int_0^{\sup\phi}R^{\{\phi>\alpha\}}v(x)\,d\alpha\end{aligned}$$

が成立する．また，$v=1\in\mathfrak{U}$ならば，

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{\phi}(x)&=\int 1\,d\varepsilon_x^{\phi}\\&=\frac{1}{\sup\phi}\int_0^{\sup\phi}R^{\{\phi>\alpha\}}1\,d\alpha\\&\leqq\frac{1}{\sup\phi}\int_0^{\sup\phi}1d\alpha=1\quad<\infty\end{aligned}$$

を満たす．

いま $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\overline{U}_m\subset U_n$, $(m<n)$, を満たす可付番基とする．このとき関数 $\phi_{mn}\in C_c$, $0\leqq\phi_{mn}\leqq1$, を定義する：

$$\phi_{mn}(x)=\begin{cases}0 & x\in C\overline{U}_n\\1 & x\in\overline{U}_m\end{cases}$$

ただし $m\leqq n$ とする．また，X で稠密な点列を$\{x_n\}_{n+1}^{\infty}$とし，可算個の細位相に関する特異点（*finely isolated joints*）の点列を $\{\mathring{x}_j\}_{j\in J}$，$\boldsymbol{J}\subset\boldsymbol{N}$ とする．ここで数の組(m,n,l)は可付番個であるから(m,n,l)を新らためて番号をつけ，iで示す．すると，(m,n,l)に対する組(x_l,ϕ_{mn})は(x_i,ϕ_i)と表すことができる．特に組(x_i,ϕ_i)に対して，測度の族 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}:=\{\varepsilon_{x_i}^{\phi_i}\}_{i=1}^{\infty}\cup\{\varepsilon_{\mathring{x}_j}\}_{j\in J}$ を定義する．
このとき，$\{\lambda_n\}_{n+1}^{\infty}\subset M_K^+(X)$ であり，また，証明の前半から$k^*\lambda_n\in C(X)$ をうる．そこで，新らたに測度$\lambda:=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n$を次の方法で作る．$\{X_n\}$を
$X_n\subset\overline{X}_n\subset X_{n+1}\subset\overline{X}_{n+1}\subset\cdots\cdots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=X$ となるXの相対コンパクトな開集合 X_n の増加列とする．
このとき $\|k^*\lambda_n\|_{X_n}<\infty$ である．また，任意の自然数 m, $n\in\boldsymbol{N}$ に対して，

$$a_i^n\geqq a_i^{n+1}\qquad(i=1,2,\cdots)$$

且つ

$$a_m^j\geqq a_{m+1}^j\qquad(j=1,2,\cdots)$$

に対して，$\mathrm{a}_n:=a_n^n$ を定義する．すると，
$\sum_{n=1}^{\infty}a_nk^*\lambda_n$ はX_n上で一様に収束し，且つ各nに対して$k^*\lambda_n\in C(X)$であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nk^*\lambda_n$は$X$上で連続であることがわかる．

最後に，X上で$k^*\lambda>0$であることを示そう．

そこでいま，$k^*\lambda_n(y_0)=0$ となる点 $y_0\in X$ が存在したとする．λの構成から，すべての$n\in\boldsymbol{N}$に対して，$k^*\lambda_n(y_0)=0$である．ここで，次の2つの場合が考えられる．

(1) $\lambda_n=\varepsilon_{\mathring{x}_j}$,

(2) $\lambda_n=\varepsilon_{x_i}^{\phi_i}$.

まず，(1)の場合について考えよう．

$$k_{y_0}(\varepsilon_{\mathring{x}_j})=k^*\varepsilon_{\mathring{x}_j}(y_0)=0$$

したがって，Xの細位相に関する特異点の集合X_0上で$k_{y_0}=0$となる．(2)の場合については，任意の$n\in\boldsymbol{N}$に対して，$k^*\lambda_n(y_0)=0$であるから，

$$\begin{aligned}0=k^*\varepsilon_{x_i}^{\phi_i}(y_0)&=\int_0^1\mathrm{R}^{\{\phi_i>\alpha\}}\ k_{y_0}(x_i)\,d\alpha\\&\geqq R^{U_n}k_{y_0}(x_i)\end{aligned}$$

である．ただし $0\leqq\phi_i\leqq1$, $x_i\notin U_n$, $\overline{U}_m\subset U_n$. すると，$K$を$X_i$の近傍$V(x_i)$との間に$K\cap V(x_i)=\phi$ とするXのコンパクト集合とするとき，$x_i\notin K$ に対して

$$\widehat{R}^K k_{y_0}(x_i)=0$$

である．このとき

$$\widehat{R}^{V(x_i)}\, k_{y_0}(x_i) = \sup\{\widehat{R}^{K} k_{y_0}{}^{(x_i)} \mid K \text{は} K \subset CV(x_i) \text{となるコンパクトな集合}\}$$

をつかい，

$$\widehat{R}^{CV(x_i)}\, k_{y_0}(x_i) = 0$$

をうる．もし x_i の近傍 $V(x_i)$ を十分小さくとるならば，$k_{y_0}(x_i) = \sup \widehat{R}^{CV(x_i)}\, k_{y_0}(x_i) = 0$ になる．いずれの場合にしても，$X_0 \cup \{x_i\}$ 上 $ky_0 = 0$ である．また点列 $\{x_i\}$ は，X 上で稠密であることから，X 上で $k_{y_0} = 0$ になる．このことは，$X \times X$ 上の *Green* 関数 $k_y(x) = k(x, y)$ の定義に相反する．よって X 上で $k^*\lambda > 0$ である．（証完）

注意．上の命題においてえた測度 λ は S^* における1つの弱単位（*a weak unit*〔2〕）と見ることができる．

命題5．集合 X 上の関数の標準 H－錘 S（*astandard H-Come of functions*）に対して，$M_K^+(X) \cap S_0^*$ に属する正の測度の列 $\{\mu_n\}$ が存在し，次の2つの条件を満足する：

(a) $k^* \mu_n \in C(X)$,

(b) $\{\mu_n\}$ は S^* において，増加的稠密（*increasingly dense*）である．

（証明）前出の結果より，すでに次のことがわかっている．つまり，X は疑似飽和（*nearly saturated*）であり，且つ S と S^{**} とは同形（*isomonphic*）である．いま，S は関数の標準 H－錘であるから，〔2〕により，S の共役空間 S^* も標準 H－錘である．したがって，S_0^* に増加的稠密な列 $\{u_n^*\}$ が存在する．そのとき，X が疑似飽和であることから，各 u_n^* に対して，正の測度 μ_n が存在し，

$$u_n^*(u) = \int u\, d\mu_n,\ u \in S$$

をみたす．つまり，u_n^* は H－測度〔2〕を意味する．ここで u_n^* と μ_n とを S^* の同じ元と見なすことができる．したがって，S^* で増加的稠密な可付番個の集合 $D^* := \{v_n \mid v_n \in S_0^*\}$ が存在し，$D^* \subset M^+(X)$ をみたす．$\{X_n\}$ は X の部分集合の増加列で，条件：$X_n \subset \overline{X}_n \subset X_{n+1} \subset \overline{X}_{n+1} \subset \cdots$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 且つ，各 X_n は相対コンパクトな開集合，をみたすものとする．また，可付番個の測度の列 $\{\mu_{mn}\} := \{v_m|_{X_n} \mid (m, n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}\}$ を考える．列 $\{\mu_{mn}\}$ は可付番個であるから，番号をつけなおして，$\{\mu_n\}$ によって表すことにする．このとき，S^* で増加的稠密であり，$\{\mu_n\}$ は作り方からして，$M_K^+(X) \cap S_0^*$ に含まれる．
次に，各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して，$k^*\mu_n$ が X 上連続であることを証明しよう．そのためには，y_i が y に収束するとき，k_{y_i} が k_y に τ－自然位相（τ*-natural topology*）に関して収束することを示せば十分である．というのは，任意の元 $\mu \in S_0^*$ に対して

$$k^*\mu(y) = \int k_x^*(y)\,\mu(dx) = \int k_y(x)\,\mu(dx) = \mu(k_y)$$

である．ここで，τ－自然位相の定義により，もし $\tau - \lim_{y' \to y} ky' = ky$ とすると，つまり，もし

（＊） $y_i \to y \Rightarrow ky_i \to ky$（$\tau$*-natural topology*）

が言えると，

$$\begin{array}{ccc} \mu(ky') & \to & \mu(ky) \\ \| & & \| \\ k^*\mu(y') & \to & k^*\mu(y) \end{array}$$

の関係が成立する．したがって，（＊）が証明されれば，$k^*\mu_n \in C(X)$ が証明されたことになる．

命題4より，測度 $\lambda \in M^+(X) \cap S_0^*$ が存在し，条件 $\lambda(X) < \infty$, $k^*\lambda \in C(X)$ かつ X 上で $k^*\lambda > 0$ を満足する．いま，2つの関数

$$s_j := \frac{k_{y_j}}{k^*\lambda(y_j)}, \quad s := \frac{k_y}{k^*\lambda(y)}$$

を定義する．また集合 $K_\lambda^* := \{u \in S \mid (u) \leqq 1\}$ を定義しよう．このとき，集合 K_λ^* は τ－自然位相に関してコンパクトである．また，関数 s_j と s は K_λ^* に属する．すると K_λ^* は必ず集積点を有する．そこで，列 $\{s_j\}$ の集積点を v と表すことにする．そのとき $v \in K_\lambda^*$ である．

また，τ－自然位相に関して v に収束する $\{s_j\}$ の部分列が存在するから，それを新らためて $\{s_j\}$ で示すことにする．さらに，$k_\lambda^*(y)$ が X 上で連続であることより，$j \to \infty$ のとき，$k_\lambda^*(y_i)$ は $k_\lambda^*(y)$ に収束するから，ky_j は $(k_\lambda^*(y)) \cdot v$ に収束する．さらに，

$$v = \lim_S \inf s_j = \sup_j(\inf_{i \geqq j} s_i)$$

が成立する．いま，$x \in X$ を固定する．このとき

$$\lim_j \inf\, k_{y_i}(x) = \sup_j(\inf_{i \geqq j} k_{y_i}(x)) \geqq \sup_j(\inf_{i \geqq j} k_{y_i})(x),$$

且つ

$$(\widehat{\lim_j \inf k_{y_i}})(x) \geqq \sup(\widehat{\inf_{i \geqq j} k_{y_i}})(x)$$

である．特に $x \neq y$ のとき

$$k_y(x) = \lim_j \inf\, k_{y_i}(x) = \lim_j \inf\, k_{y_i}(x) = (\widehat{\lim_j \inf k_{y_i}})(x) \geqq \sup_j(\widehat{\inf_{i \geqq j} k_{y_i}})(x)$$

が成立する．ここで最後の不等号は等号に変えることができる．その理由については，いま，

$c = \sup_j(\widehat{\inf_{i \geqq j} k_{y_i}})(x)$ とおき，$k_y(x) \gneqq c$ と仮定しよ

う．つまり，点xにおいて$k_y(x)>\alpha>c$となる．実数αが存在すると仮定する．このとき，$k_y(x)$の定義の連続性の条件により，点xの近傍$U(x)$においても，

$$k_y(x)>\alpha>c$$

が成立する．さらに，

$$\exists j : k_{y_j}(x)>\alpha,$$

且つ$\exists U(x), \exists j_0$：任意$z\in U(X)$任意$i\geqq j_0$に対して

$$k_{y_{j_0}}(z)>\alpha$$

が成立する．したがって，$U(x)$上において

$$\inf_{i\geqq j} k_{y_i}\geqq\alpha,$$

また

$$\widehat{(\inf_{i\geqq j_0} k_{y_i})}(x)\geqq\alpha$$

しかし，左辺は

$$\widehat{(\inf_{i\geqq j} k_{y_i})}(x)\leqq\sup_j(\widehat{\inf_{i\geqq j} k_{y_i}})(x)$$

であるから，$c>\alpha$となり，これは矛盾である．したがって，$x\fallingdotseq y$となる任意の点$x\in X$においては，

$$k_y(x)=\sup_j(\widehat{\inf_{i\geqq j} k_{y_i}})(x)$$

が成り立つ．

もとにもどり，$j\to\infty$のとき，τ－自然位相に関して

$$k_{y_j}=k^*\lambda(y_j)\cdot S_j\to k^*\lambda(y)\cdot v$$

をうる．〔2〕Theoren 4, 5, 2により，

$$(k^*\lambda(y))\cdot v=\liminf_S k_{y_j}$$
$$=\sup_j(\inf_{i\geqq j} k_{y_i})$$

である．よって

$x\neq y$となる点xにおいて，

$$h^*\lambda(y)\cdot v(x)=k_y(x)$$

である．$x\to y$とすると，

$$h^*\lambda(y)\cdot v(y)=k_y(y)$$

となり，$h^*\lambda(y)\cdot v=k_y$をうる．よって

$$v=\frac{k_y}{k^*\lambda(y)}\ (=s),$$

つまり$C\{y\}$において，$v=s$をうる．

すると，あと，次の2つの場合に区けて証明すればよい：

(1) 点$y\in X$が細位相による特異点でないとき，

(2) 点$y\in X$が細位相による特異点であるとき．

(1)の場合は，容易に$k^*\lambda(y)\cdot v(y)=k_y(y)$にうる．(2)の場合について次に示そう．まず関数$x\to k^*_y(x)$が$X$上有限連続であり，且つ$k^*\lambda(y)\cdot v=k_y$である．すると，

$$k_y(y)=k^*_y(y)=\liminf_j k^*_y(y_j)$$
$$=\liminf_j k_{y_j}(y).$$

また，$x\neq y$なる点xにおいて，

$$k_y(x)=\liminf_j k_{y_j}(x)$$

である．したがって，任意の点$x\in X$において

$$k_y(x)=\liminf_j k_{y_j}(x)$$

である．

いま，S^*の部分集合$\{\mu'_n\in\{\mu_m\}\mid\mu'_n\leqq\varepsilon_y\}$を$F^*$で示すことにする．このとき，

$$\vee F^*=\varepsilon_y$$

であり，また，$a=k^*_\lambda(y)$とおくと，$j\to\infty$のとき，τ－自然位相に関して，

$$k_{y_j}\to av$$

であるから，任意の$n\in N$に対して

$$\lim_j\mu'_n(k_{y_j})=\mu'_n(av).$$

また

$$\mu'_n(k_y)=\mu'_n(\liminf_j k_{y_j})$$
$$\leqq\liminf_j \mu'_n(k_{y_j})$$
$$=\mu'_n(av)$$
$$\leqq\varepsilon_y(av)$$
$$=av(y)$$

である．いまnを十分大きくとると，$\vee F^*=\varepsilon_y$より

$$k_y(y)\leqq av(y)$$

をうる．

また，逆については，

$$k_y(y)=k^*_y(y)=\liminf_j k^*_y(y_j)$$
$$=\liminf_j k_{y_j}(y)=\liminf_j \varepsilon_y(ky_j)$$
$$\geqq\varepsilon_y(a\cdot v)=av(y)$$

であるから，したがって，

$$h_y(y)=h^*\lambda(y)\cdot v(y)$$

をうる． （証完）

注意2．上の命題5において構成した測度の列$\{\mu_n\}\subset M^+_K(X)\cap S^*_0$を使い，$\mathfrak{U}$の部分集合である$H$－錘$S$の元の特徴付けを与えることができる：任意の元$u\in\mathfrak{U}$に対して，次の性質は同値である．

(1) すべての$n\in\boldsymbol{N}$に対して，$\mu_n(u)<\infty$である．

(2) 集合$\{x\in X\mid u(X)<\infty\}$は細位相に関して稠密である．

(3) 集合$\{x\in X\mid u(X)<\infty\}$は通常の位相に関して稠密である．

(1)→(2)→(3) は容易に得られる．(3)→(1) について証明しよう．いま各 $u \in \mathfrak{U}$ に対して，集合 $B:\{x \in X \mid u(x) < \infty\}$ は X で稠密と仮定する．すると，X に可付番稠密な集合 $\{x_n\}$ が存在し，$\{x_n\} \subset B$ をみたす．$\sum_{j=1}^{\infty} a_j u(x_j) < \infty$ となる非負の実数列 $\{a_j\}$ をとり，測度 $\lambda := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon_{x_j}$ を定義する．このとき，λ は S に対する H−測度であり，且つ λ は S^* の弱単位 (*a weak unit*) をなす．なんとなれば，各 $s \in S$ に対して $\lambda(s)=0$ から $s=0$ をうる．したがって，各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して，n に従属する正の実数 C_n が存在し，S^* において $\mu_n \leqq C_n \lambda$ を満たす．すると各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$\mu_n(u) \leqq C_n \lambda(u) = C_n \sum_{j=1}^{\infty} a_j u(x_j) < \infty$$

をうる．

3 S上における掃散関数の性質

Green 関数の存在する$\mathfrak{P}$−調和空間 $(X,\ \mathfrak{U})$ 上での非負の優調和関数の集合 S 上において，次の結果をうる．

定理 6．S は$\mathfrak{P}$−調和空間 $(X,\ \mathfrak{U})$ 上での非負の優調和関数の集合とする．特に，定数 1 は$\mathfrak{U}$に含まれると仮定する．U は相対コンパクトな開集合，K は U に含まれるコンパクト集合を示す．このとき，自然数 i_0 と正に実数 M が存在し，次の不等式を満足する：任意の元 $u \in S$ に対して

$$\langle \mathrm{I} \rangle \quad \sup_{x \in K} \widehat{R}^{CU} u(x) \leqq M \sum_{i=1}^{i_0} \mu_i(u).$$

ただし，すべての μ_i は $M_K^+(X) \cap S_0^*$ の元である．

(証明) いま，任意の元 $u \in S$ に対して，

$$\Phi(u) = \sup_K \widehat{R}^{CU} u$$

とおく．S 上の汎関数Φは，次の 3 つの性質：

① 任意の元 $u \in S$ に対して，$0 \leqq \Phi(u) < \infty$,

② 任意の元 $u \in S$ と任意の正の実数 c に対して $\Phi(cu) = c\Phi(u)$

③ 任意の元 $u,\ u' \in S$ に対して，もし $u \leqq u'$ ならば$\Phi(u) \leqq \Phi(u')$ である

を満たす．

S 上の汎関数 $\Phi(u) = \sup_K \widehat{R}^{CU} u$ が不等式$\langle \mathrm{I} \rangle$を満たすことを，2 段階に分けて以下に証明する．

1）相対コンパクトな開集合 U と $K \subset U$ なるコンパクト集合 K に対して，自然数 n_0 と 2 つの実数 a, b が存在し次の関係を満たす：各元 $u \in S$ に対して，もし $\sum_{i=1}^{n_0} \mu_i(u) \leqq a$ ならば $\Phi(u) \leqq b$ である．なぜならば，このことが成立しなければ，各 $n \in \boldsymbol{N}$ と任意の数 $a,\ b \in R^1$ に対して $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(u) \leqq a$ かつ $\Phi(u) > b$ なる元 $u \in S$ が存在する．ここで，任意の自然数 q に対して $n=q$, $a=\dfrac{1}{2^q}$, $b=q$ とおくと，このとき S の元の列 $\{u_q\}_{q=1}^{\infty}$ が存在し，$\Phi(u_q) \geqq q$, かつ，$\sum_{i=1}^{q} \mu_i(v_q) \leqq \dfrac{1}{2^q}$ が成立する．そこで $u = \sum_{q=1}^{\infty} v_q$ とおく．このとき各自然数 $u \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$\mu_n(u) = \sum_{q=1}^{n_0} \mu_n(v_q) + \sum_{q=n+1}^{\infty} \mu_n(v_q)$$

$$\leqq \sum_{q=1}^{n_0} \mu_n(v_q) + \sum_{q=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^q}\right) < \infty$$

が成立する．したがって，命題 5 の注意により $u \in S$ である．このとき，任意の自然数 $q \in N$ に対して

$$\Phi(u) \geqq \Phi(v_q) \geqq q$$

であるから，$\Phi(u) = \infty$ となる．このことは，Φの性質に相反する，したがって，1）の場合の命題が成立する．

2）S の元 u に対して，$\alpha = \sum_{i=1}^{n_0} \mu_i(u)$ とおくと，$\alpha \geqq 0$ である．$\alpha > 0$ のとき，$\sum_{i=1}^{n_0} \mu_i\left(\dfrac{a}{\alpha} \cdot u\right) = a$ である．すると$\Phi\left(\dfrac{a}{\alpha} \cdot u\right) \leqq b$．$\Phi$の性質から，$\dfrac{a}{\alpha}\Phi(u) \leqq b$ である．したがって

$$\Phi(u) \leqq \frac{b}{a} \cdot \alpha = \frac{b}{a} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \mu_i(u) = M \sum_{i=1}^{n_0} \mu_i(u)$$

である．ただし $M = \dfrac{b}{a}$ である．$\alpha = 0$ のとき，任意の実数 $c \geqq 0$ に対して，

$$c\alpha = \sum_{i=1}^{n_0} \mu_i(cu) \text{ かつ } \Phi(cu) = c\Phi(u) \leqq bc,$$

よって，$c=0$ とすると，$\Phi(u)=0$ かつすべての実数 Mに対して $M \sum_{i=1}^{n_0} \mu_i(u) = 0$ である．よって，命題の証明を完成する．(証完)

4. Doob 収束性の特徴付け

$(X,\ \mathfrak{U})$ 上の Green 関数 $k(x,\ y)$ $(= k_y(x) = k_x^*(y))$ に対して，次の性質が成立する．

補題 7．任意の開集合 U に対して，関数

$$(x,\ y) \to \widehat{R}^{CU} k_y(x)$$

は $U \times U$ 上において連続である．

(証明)〔11〕Lemma 4, 5 を参照せよ．

さらに，Green 関数 $k(x, y)$ をもつ$\mathfrak{P}$−調和空間に対して，次の共役関数をもつ共役調和空間 $(X, \mathfrak{U}^*)$ が存在することがよく知られている〔5〕：任意の部分集合 $G \subset X$ と点 $x, y \in X$ に対して

$$\widehat{R}^G k_y(x) = {}^*\widehat{R}^G k_x^*(y).$$

ただし ${}^*\widehat{R}^G k_x^*(y)$ は関数 h_x^* と集合 G に関する掃散関数を示す．

補題8．（〔5〕p112）．$\mathfrak{P}$－調和空間（X, $\mathfrak{U}$）共役$\mathfrak{P}$-調和空間（X, $\mathfrak{U}^*$）上において，各点 $x \in X$ に対して関数 $y \to k_x^*(y)$ は k_x^* の優調和台 $s\text{-}supp\,(k_x^*)$ が唯一点からなる集合 $\{x\}$ に等しい共役ポテンシャルをなす．

上の2つの補題により，X の任意の開集合 U に対して，Green 関数を作ることができる．

補題9．U は X の任意の開部分集合とする定数関数は$\mathfrak{U}$に含まれると仮定する．この時 $U \times U$ 上の関数

$$^U k(x, y) = (k(x, y) \to \widehat{R}^{CU} k(x))|_U$$

①′　2変数 (x, y) の関数として下半連続であり，対角線 $(x = y)$ を除いた所では連続である．

②′　各点 $y \in U$ に対して，関数 $x \to {}^U k(x, y)$ は $(U, \mathfrak{U}|_U)$ 上でポテンシャルをなし，集合 $\{y\}$ の補集合 $C\{y\}$ では調和である．

③′　U 上の任意の有限な連続ポテンシャル $^U p$ に対して，常に $^U p = {}^U k \mu$ となる，非負の表現測度 μ が存在する．

（証明）条件①′②′については，前出の補題7と掃散関数の性質により得られる．③′について考察しよう．Green 関数を持つ$\mathfrak{P}$－調和空間（X, $\mathfrak{U}$）上においては，Green 関数の条件③と次の条件〔0*〕とは同値であることが知られている〔6〕，

〔0*〕：各点 $x \in X$ に対して，関数 k_x^* は，共役調和空間（X, $\mathfrak{U}^*$）上の共役ポテンシャルであり，$\{x\}$ の補集合 $C\{x\}$ では共役調和である．

しかし，性質①②③をもつ Green 関数が存在し，且つ定数関数が優調和関数であるような$\mathfrak{P}$－調和空間（X, $\mathfrak{U}$）の共役調和空間（X, $\mathfrak{U}^*$）上において，各点 $x \in U$ に対して，上の条件〔0*〕は成立する．したがって，条件③′をうる．（証完）

定理10．（X, $\mathfrak{U}$）は Green 関数 $k(x, y)$ が存在する$\mathfrak{P}$－調和空間とする．定数関数1は優調和関数と仮定する．この時，不等式 $\langle \mathrm{I} \rangle$ と Doob の収束性とは同値である．

（証明）Doob 収束性から不等式 $\langle \mathrm{I} \rangle$ を得ることは容易であるから，不等式 $\langle \mathrm{I} \rangle$ から Doob の収束性が得られることを証明しよう．

いま，関数列 $\{h_n\}$ は X の任意の開集合 U 上の非負の調和関数の増加列をなし，その極限関数 $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ は U の稠密な集合上で有限であるとしよう．この時，U 上の優調和関数の性質から，h は U 上の非負の優調和関数である．また，h_n は h に単調増加して収束するから，各点 $x \in U$ において，x を含む任意の相対コンパクトな開集合 V, $V \in \mathfrak{B}(U)$，に対する h_n の掃散関数 $\widehat{R}^{CV} h_n(x)$ と h の掃散関数 $\widehat{R}^{CV} h(x)$ との間には，

$$\widehat{R}^{CV} h_n(x) = h_n(x) \text{ より } \widehat{R}^{CV} h(x) = h(x)$$

が得られる．

ここで，前出の補題8，補題9から，開集合 U に対して，関数

$$^U k(x, y) = (k(x) - \widehat{R}^{CU} k_y(x))|U$$

は，条件①′②′③′を満足することが得られる．

したがって，定理6により，自然数 n_0 と正の定数 M を適当に決めると，各相対コンパクトな開集合 V, $\overline{V} \subset U$，に対して，

$$\sup_{x \in K} {}^U \widehat{R}^{CV} h(x) \leqq M \sum_{i=1}^{n_0} \mu_i\ (h) < \infty$$

の関係が成立する。ただし K は $K \subset U$ となる X の任意のコンパクト集合である。他方，

$$\sup_{x \in K} {}^U \widehat{R}^{CV} h(x) = \sup_{x \in K} h(x)$$

である．したがって，h の U 上の局所有界性をうる．すると，調和空間の収束性より h は U 上で常に調和である．すなわち，Doob 収束性が成立する．（証完）

この報告書を作成するに当たり，研究課題の議論を通して，多くの助言や指導をされた池上輝男教授（大阪市立大学）に感謝の意を表します．

本報告は，平成5年度日本数学会（平成5年4月）で行った講演内容を中心にしてまとめたものである．

（1993年7月23日受理）

参考文献

〔1〕J.Bliedtner and W. Hansen : *Potential Theory. Ann Analytic and Probablitstic Approach to Balayage,* Springer, Berlin, 1986

〔2〕N. Boboc, G. Bucur and A. Cornea : *Order and Convexity in Potential Theory : H-Cones,* Lecture Note in Math. 853 Springer, Berlin, 1981.

〔3〕C. Constantinescu and A. Cornea : *Potential Theory on Harmonic Spaces,* Springer, Berlin, 1972.

〔4〕J. L. Doob : *Probability methods applied to the first boundary value problem,* In : Proc. 3rd Berkeley Sym. on Math. Stat. and Prob., (1954/55) 49-80, Berkeley: University of California Press, 1956.

〔5〕T. Ikegami : *Duality on Harmonic Spaces,* Osaka J. Math. 28 (1991) 93-116.

〔6〕T. Ikegami : *Duality on Balayage Spaces,* (To appear).

〔7〕 K. Janssen : *On the Existence of a Greem Function for Harmonic Spaceas*, Math. Ann. 208 (1974) 295-303.

〔8〕 H. Maagli : *Representation integrale des potemtiels*, Sem. de Theorie du ptentiel, n° 8. Lecture Notes in Math. 1235, Springer 1987, 114-119.

〔9〕 G. Mokobodzki : *Representation integrale des fonctions surharmoniques au moyen des reguites*, Ann. Inst. Fourier 15 (1965) 103-112.

〔10〕 U. Schirmeier : *Konvergenzeigenschaften in Harmonischen Räume*, Invent. Math. 55 (1979) 71-95.

〔11〕 T. Murazawa : *On convergence property on balayage spaces*, Dissertation 1992.

〔12〕 T. Murazawa : 平成 5 年度日本数学会講演集(函数論分科会) 1993 年 3 月.

〔13〕 T. Murazawa : *Convergence property and superharmonic functions on balayage spaces*, Proceeding of NATO ARW. 1993.

SCI. REP. KYOTO PREF. UNIV. (NAT. SCI. & LIV. SCI.), NO.44, Ser. A, p.1~8 (NOV. 1993)