京都府立大学学術報告（理学・生活科学）第43号　A系列 p. 1〜4（1992年11月）

# 調和空間上における公理Dの特徴付けについて

村　澤　忠　司

# On the Characterization of Axiom D on Harmonic Spaces

TADASHI MURAZAWA

## はじめに

1983年, A. F. Grishin [7] は, $n$ 次元 Euclidean 空間 $R^n$ ($n \geqq 2$) において，次のような問題について考察している：$R^n$ ($n \geqq 2$) の開集合 $\Omega$ 上で極集合を除いて定義されている非負の $\delta$－劣調和関数 $w$ に関する Riesz 測度の集合 $E_1 = \{x \in \Omega \mid \lim_{r \to 0} \int w d\sigma_{(x,r)} = 0\}$ 上への制限は非正であるか。ただし，$\sigma_{(x,r)}$ は $R^n$ の開集合 $\Omega$ 内の1点 $x$ を中心とする半径 $r$ の球面上の表面測度を示す。この命題は，一般の調和空間の上では成立しない。そこで，自然な拡張として，調和空間上にいかなる条件を加付すれば，調和空間上でも同様に，上の Grishin の命題が拡張した形で成り立つか問われる。我々は，その1つの解答として，調和空間上にある種の条件（定理2）を付加することにより，$R^n$上での結果の一般的な拡張として，この命題が成立することが証明できることを報告する。

さらに，可算基をもつ局所コンパクトな Hausdonff 空間 $X$ の各点で正のポテンシャルが存在する調和空間（$\mathfrak{P}$-調和空間という）上において，公理D（the Domination Axiom）が成立するための必要十分条件（定理2と定理3）を与えることができる。この結果は，1987年におけるチェコスロバキヤでの国際ポテンシャル論会議における Lukeš and Malý [10] によって報告された問題の一部の解答（必要条件）を与えていることになる。

## 1．定義と条件

可算基をもつ局所コンパクトな Hausdonff 空間 $X$ と $X$ 上で定義された非負の下半連続関数からなる族 $\mathfrak{U}$ との対 ($X$, $\mathfrak{U}$) は，Constantinesc-Connea [4] の意味での $\mathfrak{P}$-調和空間の構造をもつものとする。$\mathfrak{U}$ は定数1を含むものとする。$w$ は $X$ の部分開集合 $U$ 上で定義されている $\delta$-劣調和関数を示す。つまり，$w$ は，$U$ で上で定義されている2つの優調和関数 $u,v$ の差：$w = u - v$ の形で表されている。このとき，$w$ は $U$ 上において極集合を除いて定義される。$\mu[w]$ は $U$ 上の $\delta$-劣調和空間 $w$ に関する Riesz 測度（Riesz charge）を示す。集合 $M^+$ は $X$ 上の非負測度の族を表す。特に，$\mu$, $\nu \in M^+$ に対して，もし $\mu - \nu \in M^+$ ならば，$\mu \geqq \nu$ と定義して，$M^+$ に大小の順序関係を入れる。

次の集合を，それぞれの記号で表わす。

$\mathcal{S}$：$X$ 上の優調和関数の全体がなす集合,

$\mathfrak{U}^+$：$X$ 上の非負の hyperharmonic 関数のなす円錐体,

$\mathfrak{P}$：$X$ 上のポテンシャルのなす円錐体,

$\mathfrak{P}^b$：$X$ 上の局所有限なポテンシャルのなす円錐体,

$\mathfrak{P}^s$：$X$ 上で，連続なポテンシャルの可付番個の和で表わされる連続なポテンシャルのなす円錐体,

$S(p)$：$X$ 上のポテンシャル $p$ の優調和的な台，つまり，ポテンシャル $p$ が調和である $X$ の最も大きな開集合を $U$ とすると，$X - U$ を意味する。

$b(A)$：$X$ の部分集合 $A$ の低，つまり $\{x \in A \mid \varepsilon_x^A = \varepsilon_x\}$,

ただし，$\varepsilon_x$ は点 x の点測度，また，$\varepsilon_x^A$ は $\varepsilon_x$ の $A$ 上への掃散測度を示す。

さらに，積空間 $X \times X$ 上の2変数関数 $G(x, y)$ は $\mathfrak{P}$-調和空間 ($X$, $\mathfrak{U}$) 上の Green 関数を示す。つまり，

京都府立大学生活科学部応用数学教室
Department of Applied Mathematics, Faculty of Living Science, Kyoto Prefectural University

次のような条件をもった関数 $G(x, y)$ を考える：関数 $G(x, y)：X \times X \to [0, \infty]$ と定義され，３つの条件をみたす。

① $(x, y) \to G(x, y)$ は積空間 $X \times X$ 上での２変数の関数として下半連続であり，対角線（$x=y$）を除いて連続である。

② $X$ の各点 $y$ に対して，$x$ の関数 $x \to G(x, y)$ としてポテンシャルをなし，且つ，優調和的な台は $S(G(\cdot, y)) = \{y\}$ をみたす。

③ $\mathfrak{P}$ の任意のポテンシャル $p$ を積分表現

$$p(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y)$$

する非負の測度 $\mu\,(\in M^+)$ が存在する。

今後，この報告書において，$\mathfrak{P}$-調和空間（$X$, $\mathfrak{U}$）は上の意味での Green 関数をもち，定数関数１は $\mathcal{S}^+$ に属すると仮定する。

次の各条件を設定する。

[D]（AxiomD：Domination Axiom）：各 $p \in \mathfrak{P}^b$，$\forall u \in \mathfrak{U}^+$ にたいして，もし $S(p)$ 上で，$u \geqq p$ ならば，$X$ 上において $u \geqq p$ が成立する。

[$P_o$]（Polarity Axiom）：$X$ 上の各準極集合は極集合である。

[G]　(Grishin's lemma)：$X$ 上で定義された $\delta$-劣調和関数 $w$ が $X$ 上極集合を除いて非負ならば，$w$ に関する Riesz 測度 $\mu[w]$ の集合 $E = b(\{w=0\})$ 上への制限 $\mu[w] \| E$ は非正である。

[$\bar{D}$]（Extended Domination　Axiom）：有限なポテンシャル $p \in \mathfrak{P}$ は必ず $\mathfrak{P}^s$ に属する。

## 2．公 理 D と Grishin の 補 題 の 関 係

可算基をもつ局所コンパクト集合 $X$ 上の $\mathfrak{P}$-調和空間（$X$, $\mathfrak{U}$）には，Green 関数 $G(x, y)$ が存在し，また，定数関数１は $\mathfrak{U}$ に属するものと仮定する。このとき，$X$ 上においての次のような関係が成立することがよく知られている。

定理１．(Constantinescu-Cornea [4]) Green 関数 $G(x,y)$ が存在する $\mathfrak{P}$-調和空間 $(X, \mathfrak{U})$，$1 \in \mathfrak{U}$，上において条件 [D] が満たされるとき条件 [$P_o$] が成立する。

ここで，我々はこの報告の１つの主題となる次の命題を得る。

定理２．Green 関数 $G(x,y)$ が存在する $\mathfrak{P}$-調和空間 $(X, \mathfrak{U})$，$1 \in \mathfrak{U}$，上において条件 [D] 満たされるとき [G] が成立する。

証明．演繹的な方法にもとずき，$\mathfrak{P}$-調和空間 $(X, \mathfrak{U})$ 上のポテンシャルが Green 関数の積分表現で得られることから，与えられている $\delta$-劣調和関数 w は，２つの非負の測度 $\nu$, $\lambda\,(\in M^+)$ を使い，$w = G\nu - G\lambda$ と表わされる。仮定 [D] により

$$G\lambda \leqq G\nu$$

且つ　$E = b(\{z \in X \mid G\lambda(z) = G\mu(z)\})$ 上において

$$G\lambda = G\nu$$

である。ここで，上の関係は，本来極集合を除いて成立しているから，優調和関数の細位相に関する連続性により，$X$ のいたるところで成立していると考えてよい。

このとき，$\nu$ の E 上への制限を $\nu_1 := \nu | E$ と表すと，$\nu$ は２つの非負の測度 $\nu_1$，$\nu_2$ の和で書くことができる：

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,\quad ただし\ \nu_2 = \nu - \nu_1$$

さらに，$\nu_1$ の E 上への測度の掃散 $(\nu_1)^E$ と $\nu_1$ との間には $\nu_1 = (\nu_1)^E$ が成立する。また，

$$G\lambda \leqq G\nu = G\nu_1 + G\nu_2$$

が成立する。ここで，$G\nu_1$，$G\nu_2$ は優調和関数であることから，Mokobodzki-Riesz の分解定理により，２つの正測度 $\lambda_1$，$\lambda_2\,(\in M^+)$ が存在し，且つ，条件：

$$G\lambda = G\lambda_1 + G\lambda_2$$

$$G\lambda_1 = G\nu_1,\quad G\lambda_2 \leqq G\nu_2$$

を満たす。

特に，E上において $G\lambda_1 = G\nu_1$ である。このとき，$\nu_1 = (\nu_1)^E$ であることから，

$$G\lambda_1 \geqq \hat{R}^E_{G\lambda_1} = \hat{R}^E_{G\lambda_1} = G((\nu_1)^E) = G\nu_1$$

が成り立つ。よって

$$G\lambda_1 = G\nu_1$$

をうる。したがって　$\lambda_1 = \nu_1$，また，$\lambda \geqq \nu_1$ が得られる。すると，

$$\lambda | E \geqq \nu_1 | E = \nu_1 = \nu | E,$$

このことから，

$$\mu[w] = \nu - \lambda$$

且つ

$$\mu[w] | E = \nu | E - \lambda | E \leqq 0$$

が得られる。　　　　　　　　　　　　　　　（証明完）

また，条件 [$P_o$] を仮定することにより，上の定理の逆が成立する。

定理３．Green関数 $G(x,y)$ が存在する $\mathfrak{P}$-調和空間 $(X, \mathfrak{U})$，$1 \in \mathfrak{U}$，上において，条件 [$P_o$]，[G] を仮定するとき，条件 [D] が成立する。

証明．いま，仮定 [G] を $\delta$-劣調和関数 $w = u - v$, $u, v \in \mathcal{S}^+$ について考える。特に，$u, v$ を $\mathfrak{P}^b$ に属するとしよう。まず，$p \in \mathfrak{P}^b$ に対して，非負の測度 $\mu \in M^+$ が存在し，$p = G\mu$，$\mu \geq 0$ をみたす。いま，$p$ の優調和的な台 S(p) を A で表し，

$$w := p - \hat{R}^A_p$$

とおく。このとき，$w\geq 0$ 且つ b(A) において $w=0$ である。さらに，$\hat{R}_p^A=G\lambda$ をみたす非負の測度 $\lambda$ が存在する。したがって，

$$\mu[w]=\mu[p]-\mu[\hat{R}_p^A]=\mu-\lambda$$

と表される。仮定［G］により b(A) 上で $\mu\leqq\lambda$ が成り立つ。

また，仮定［$P_0$］により，A$\setminus$b(A) は極集合である。すると，$p\in\mathfrak{P}^b$であり，さらに，$p$はX上で連続であるから，

$$\mu(A\setminus b(A))=0,$$

よって，A上において，$\mu\leqq\lambda$が成り立つ。

さらに，$G\mu\leqq G\lambda$であるから，

$$p\leqq\hat{R}_p^A\leqq p$$

よって，$p=\hat{R}_p^A$をうる。

いま，$X$ 上の任意の非負の優調和関数 s に対して，S($p$) 上で $p\leqq$s と仮定すると，上の議論での $p$ として $G\mu$，A として S($p$) を対応して考えると，$X$ 上において

$$s\geqq\hat{R}_s^A\geqq\hat{R}_p^A=p$$

を得る。よって条件［D］が成立することを得る。

（証明完）

定理 4．Green関数$G(x,y)$ が存在する $\mathfrak{P}$-調和空間 $(X,\mathfrak{U})$，$1\in\mathfrak{U}$，上において条件［G］，［$P_0$］を仮定するとき，条件［$\bar{D}$］が成り立つ。

証明. $p$を$X$上の有限なポテンシャルとする。このとき，定数$c$との間にinf($p$, $c$) を定義し，これを$q$で表すことにする。すると，$q$は$X$上の有限なポテンシャルである。したがって，$q$は$\mathfrak{P}^b$に属する。さらに，$(X,\mathfrak{U})$ の持つ性質により，2つのポテンシャル$p$, $q$ はGreen関数の積分表示を与える非負の測度を各々 $\mu$, $\lambda$ で表示することにする：$p=G\mu$，$q=G\lambda$。したがって，$p$, $q$ によって定義される $\delta$-劣調和関数 $w=p-q$ の Riesz 測度 $\mu[w]$ は $\mu[w]=\mu-\lambda$ で与えられる。

いま，任意の集合 $e\subset\{w=0\}=\{p=q\}=\{q\leqq c\}$は，条件［G］により

$$\mu(e)\leqq\lambda(e)=0$$

である。したがって，$\mu$ の優調和的な台 $S(\mu)$ は $e$ 上に存在しない。

さらに，$X$ の任意の極集合 $e$ に対して，

$$e_n:=\{p\leqq n\}\cap e$$

と定義すると，$e=\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n$ と表示することができる。このとき，$e_n$は，$e_n\subset\{p\leqq n\}$ の関係をみたす極集合である。すると，$\mu(e_n)=0$ となり，$\mu(e)=0$ をうる。したがって，$\mu$ の優調和的な台 S($\mu$) は $X$ の極集合上に存在しない。Janssen and Nguyen-Xuan-Loc［9］によってよく知られた事実により，このことは，ポテンシャル $p(=G\mu)$ が族 $\mathfrak{P}^s$ に属することと同値である。すなわち，条件［$\bar{D}$］が成立する。　（証明完）

注意．1）$X$ 上の各点に正のポテンシャルの存在する Brelot の調和空間においては，条件［D］のもとで条件［G］は常に成立する。

2）この報告書においては，$\mathfrak{P}$-調和空間（$X$, $\mathfrak{U}$）上に Green 関数の存在を仮定したが，一般の調和空間においては，ポテンシャルの積分表現が可能であれば，この仮定は取ることができる。

例．　$n$ 次元 Euclidean 空間 $R^n$（$n\geq 2$）上において，Green 関数 $G(x, y)$ によって与えられる2つのポテンシャル $u$, $v$ を次のように取る：

$$\begin{cases} u=2G\varepsilon_0 \\ v=G\varepsilon_0 \end{cases}$$

ただし，$\varepsilon_0$は原点 $0\in R^n$における点測度を表す。この時，$u$, $v$ によって作られる $\delta$-列調和関数 $w=u-v=G\varepsilon_0$は極集合を除いて常に非負である。また集合 $E=\{w=0\}=\{u=v\}=\{0\}$ 上への $w$ の Riesz 測度の制限は

$$\mu[w]|E=2\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0\geqq 0$$

である。つまり，条件［G］は成立しない。

## 謝　辞

この報告書の作成に当たり，私の在デンマーク中に，ご指導を頂いた Bent Fuglede 教授（コペンハーゲン大学）に感謝します。研究問題の議論を通して多くの助言や指導をされた J. Lukeš 教授（チェコスロバキヤ，カールス大学）に感謝の意を表します。

本報告は，平成4年度日本数学会（平成4年4月）で行った講演内容を中心にしてまとめたものである。

（1992年7月31日受理）

## 参 考 文 献

［1］M. G. Arsove: Functions representable as differences of subharmonic functions. in the ICM, 1950

［2］H. Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Springer-Verlag LNM 22, Berlin, 1966

［3］J. Bliedtner and W. Hansen: Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1986

［4］C. Constantinescu and A. Cornea: Potential Theory on Harmonic Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1972

［5］B. Fuglede: Finely Harmonic Functions. Springer-Verlag LNM 289, 1972

[ 6 ] B. Fuglede: Some properties of the Riesz charge associated with a $\delta$-sub-harmonic function. December 1991, Preprint Series 1991, No. 23

[ 7 ] A. F. Grishin: Sets of regular growth of entire functions. *Theori. Funktsii functsional. Anal. i Prilozhen*, 40, (1983) 36-47

[ 8 ] T. Ikegami: Duality on Harmonic Spaces. *Osaka J. Math.*, 28, (1991) 93-116

[ 9 ] K. Janssen and Nguyen-Xuan-Loc: On the Balayage of Green Function on Finely Open Sets. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 31, (1975) 147-155

[10] J. Lukeš and J. Malý: Local connectedness of the fine topology. Springer-Verlag, LNM, 234-235, Berlin 19

[11] T. Murazawa: 平成 4 年度日本数学会講演集 (函数論分科会) 1992 年 4 月.

[12] M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory. Marzen, Tokyo, 1959

SCI. REP. KYOTO PREF. UNIV. (NAT. SCI. & LIV. SCI.), NO.43, Ser. A, p.1～4 (NOV. 1992)