SCI. REP. KYOTO PREF. UNIV. (NAT. SCI. & LIV. SCI.), NO. 38, Ser. A, p. 1~3 (NOV. 1987)

Sur les sociétés de surfaces caractéristiques à singularité essentielle dégénérative

Par SEIZO KONDO*)

(Reçu le 1 Juillet, 1987)

Dans le mémoire précédent [2], j'ai introduit la société de surfaces caractéristiques dans l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Alors j'ai étudié sa structure la plus générale sans analyticité. Dans la présente note, on étudie une société de surfaces caractéristiques qui est globalement analytique dans un domaine: sa structure à l'intérieur du domaine et son allure à la frontière du domaine. Particulièrement on traite aussi le problème d'analyticité globale d'une société de surfaces caractéristiques qui est localement analytique.

1. Soient D un domaine dans $\mathbf{C}^2$ et S une famille de surfaces caractéristiques irréductibles dans D. S s'appelle *société de surfaces caractéristiques* dans D, ou simplement *société* dans D, si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

1° Par tout point de D passe au moins une surface de S;

2° Sur une surface quelconque de S, l'ensemble de points, par lesquels passent plusieurs surfaces de S, pouvant être en nombre infini, n'a pas de points d'accumulation dans D.

Tout point de D par lequel passent une infinité de surfaces de S s'appelle *point d'indétermination* de S. Soit D′ un domaine contenu dans D. Soit S′ la famille formée de toutes les composantes irréductibles des restrictions dans D′ des surfaces de S. S′ est une société dans D′ et s'appelle *restriction* de S à D′.

Concernant la caractère des sociétés dans D, on peut considérer trois sortes suivantes:

1) Une société S dans D est dite *globalement analytique* dans D, s'il y a un ensemble discret e dans D et une application holomorphe F: D-e→R, R étant une surface de Riemann, telle que pour tout point $c \in R$ la fermeture dans D de l'image inverse $F^{-1}(c)$ soit une surface caractéristique consistant en des surfaces de S. Soit p un point de D. S est dite *localement analytique* en p, si la restriction de S à un voisinage v_p de p est globalement analytique dans v_p.

Pour une société globalement analytique dans D, la *projection analytique* de S est définie d'après la manière dûe à K. Koch [1]. C'est une surface de Riemann, par les points de laquelle S est paramétrée.

2) Une société S dans D est dite *globalement continue* dans D, s'il y a un ensemble discret e dans D et une application continue et ouverte G: D-e→R, R étant une surface de Riemann, telle que pour tout point $c \in R$ la fermeture dans D de l'image inverse $G^{-1}(c)$ soit une surface caractéristique consistant en des surfaces de S.

3) Une société S dans D est dite *globalement normale* dans D, si elle est normale comme famille simple de surfaces caractéristiques au sens de K. Oka [4].

La *continuité locale* et la *normalité locale* en un point de D sont définies de la même manière que l'analyticité locale.

2. Soient $\tilde{D}$ un domaine dans $\mathbf{C}^2$ et E un ensemble fermé dans $\tilde{D}$. Supposons que $D(=\tilde{D}\text{-}E)$ soit un domaine. Soit S une société dans D, qui est globalement analytique. Un point $p \in E$ s'appelle *point singulier essentiel* de S, si S n'est prolongeable dans aucun voisinage v_p de p de la manière que la

*) Faculty of Living Sciences, Kyoto Prefectural University

prolongée soit globalement analytique dans $D \cup v_p$. En générale, un ensemble fermé E dans $\tilde{D}$ est dit *dégénératif* dans $\tilde{D}$ s'il est représentable par une réunion dénombrable des surfaces caractéristiques, chacune desquelles étant définie respectivement dans un domaine contenu dans $\tilde{D}$. Dans ce cas $\tilde{D}$-E est toujours un domaine. Soit M une famille quelconque de surfaces caractéristiques dans $\tilde{D}$. On note $|M|$ son support. On dit que M est *dégénératif*, si $|M|$ l'est. Et on dit que M est *de seconde catégorie au sens de R. Baire*, si $|M|$ l'est.

Etant donnée une société $\tilde{S}$ dans $\tilde{D}$, qui est localement analytique en tout point de $\tilde{D}$. Est-ce-que $\tilde{S}$ est toujours globalement analytique dans $\tilde{D}$? C'est le *problème d'analyticité globale* d'une société localement analytique.

Théorème 1: *Soient $\tilde{D}$ un domaine dans $\mathbf{C}^2$ et E un ensemble dégénératif dans $\tilde{D}$. Soit S une société dans D $(=\tilde{D}$-E), qui est globalement analytique. Supposons que S admet au moins un point de E comme un de ses points singuliers essentiels. Alors l'ensemble $E^*(\subseteqq E)$ des points singuliers essentiels de S est un ensemble dégénératif dans $\tilde{D}$. On a de plus les énoncés suivants*:

I. *La projection analytique de S doit être une des $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}^*$ ou $\mathbf{T}^1$*[1].

II. *Si de plus S ne contient que des surfaces irrégulières de type (A)*[2], *alors*:

1° *La famille S^* des surfaces de S qui s'accumulent à E^* est de seconde catégorie au sens de R. Baire*; *et*

2° *Chaque surface de S^* s'accumule à E^* et d'une manière stricte à un certain sens.*

Les assertions des énoncés I et II seront illustrées par des exemples simples.

A l'aide du théorème 1, on peut répondre affirmativement à un cas très spécial du problème d'analyticité globale.

3. Si l'on ne fait, dans le théorème 1 II, aucune supposition sur les surfaces irrégulières, et si l'on admet des surfaces irrégulières de type (B)[2], on peut dire qu'ils existent diverses sortes de sociétés qui ne contiennent aucunes surfaces s'accumulant aux ensembles E^* de leurs points singuliers essentiels. Pour préciser cela, considérons la situation suivante:

Soit $\tilde{S}$ une société dans $\tilde{D}$ contenant une famille partielle dégénérative M dans $\tilde{D}$ telle que la restriction S de $\tilde{S}$ dans $D(=\tilde{D}-|M|)$ soit globalement analytique. Supposons que S satisfasse aux deux conditions suivantes:

1° S admet tout point de $|M|$ comme un de ses points singuliers essentiels;

2° La projection analytique de S est R.

Alors on dit que *$\tilde{S}$ réalise à son intérieur la singularité essentielle $|M|$ avec la projection analytique correspondant R.*

Concernant l'allure de $\tilde{S}$ au voisinage de la singularité essentielle $|M|$, on peut considérer trois rangs suivants:

1) $\tilde{S}$ reste localement analytique en chaque point de $|M|$, et d'ailleurs reste globalement continue dans $\tilde{D}$;

2) $\tilde{S}$ cesse d'être localement continue en chaque point de $|M|$, mais reste globalement normale dans $\tilde{D}$;

3) $\tilde{S}$ cesse d'être localement normale en chaque point de $|M|$.

Théorème 2: *Soit $\tilde{D}$ un domaine donné dans $\mathbf{C}^2$, pouvant être $\mathbf{C}^2$ lui-même. Alors ils existent dans $\tilde{D}$ des sociétés $\tilde{S}$ énumérées respectivement dans les cas* I *et* II *suivants. Dans tous les cas apparaissent des surfaces irrégulières de type (B).*

I. *Une société $\tilde{S}$ dans $\tilde{D}$ sans points d'indétermination qui réalise à son intérieur chacune des trois rangs de singularités essentielles dégénératives de manière que la projection analytique correspondant soit $\mathbf{P}^1$.*

---

1) $\mathbf{T}^1$ signifie un tore complexe du module quelconque.

2) voir T. Nishino [3] pp. 62-64.

II. *Une société $\tilde{S}$ dans $\tilde{D}$ sans points d'indétermination qui réalise à son intérieur la première des trois rangs de singularités essentielles dégénératives de manière que la projection analytique correspondant soit* $\mathbf{T}^1$.

Particulièrement ils existent de plus des sociétés $\tilde{S}$ d'espèces respectivement suivantes qui répondent négativement, dans le cas plus général, au problème d'analyticité globale:

1° Une société $\tilde{S}$ dans $\mathbf{C}^2$ sans points d'indétermination telle qu'en tout point de $\mathbf{C}^2$ $\tilde{S}$ soit localement analytique sans être globalement analytique dans $\mathbf{C}^2$.

2° Une société $\tilde{S}$ dans $\mathbf{C}^2$ avec un seul point d'indétermination à l'origine telle qu'en tout point différent de l'origine $\tilde{S}$ soit localement analytique sans l'être à l'origine.

Le 8 Novembre, 1984.

Références

[1] K. Koch, Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Die analytische Projektion, Schriftenreihe Math. Instit. Univ. Münster Heft 6 1953. Inaugral-Dissertation der Westfälischen Wilhelms Universität zu Münster. 79pp.

[2] S. Kondo, Sur les sociétés de surfaces caractéristiques dans l'espace de deux variables complexes, J. Math. Soc. Japan **23** (1971) 53-81.

[3] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968) 49-100.

[4] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. J. Sci. Hiroshima Univ. **4** (1934) 93-98.