京都府立大学学術報告（理学・生活科学）第36号　A系列 p. 1～8（1985年11月）

調和空間上での逆掃散測度についての性質

村　澤　忠　司

Properties of Inverse Balayaged Measures on Harmonic Spaces

TADASHI MURAZAWA

P-調和空間 X の相対コンパクトな開集合 U の正則点のみから成る境界 ∂U 上に台が載っている有界な質量をもつ測度 ν を与えたとき，この測度 ν を U の補集合 CU 上への掃散測度としてもつような測度 μ（ν の逆掃散測度になる）について考察し，具体的な例について報告する．

§1. はじめに

R^n ($n \geqq 3$) は n 次元ユークリッド空間を示す．u を Laplace 方程式 $\Delta u=0$ の基本解とするとき，R^n の直積空間 $R^n \times R^n$ 上の点 (x, y) で関数

$$\phi_N(x, y)=u(x-y)$$

を定義する．ϕ_N は Newton 核と呼ばれる．コンパクトな台 supp (μ) をもった R^n 上の測度 μ に対して，R^n の点 x における核 ϕ_N に関する測度 μ のポテンシャル $\phi_N\mu$ は

$$\int \phi_N(x, y)d\mu(y)$$

でもって定義される．

Ω を R^n の空でない境界 $\partial\Omega$ をもつ領域とする．$\bar{\Omega}$ は $\Omega \cup \partial\Omega$ を意味し Ω の閉集合を指す．

掃散の原理：$\bar{\Omega}$ 上に台 supp (ν) をもつ非負の測度 μ に対して，$K=\partial\Omega$ 上に supp (ν) をもち次の条件：

(a) $\phi_N\nu=\phi_N\mu$ が K 上 $q.c.$ に成立する，

(b) R^n 上いたるところ $\phi_N\nu \leqq \phi_N\mu$

をみたす測度 ν がただ一つ存在する．ここで，"K 上 $q.c.$" は容量が 0 を除いて K 上で条件が成立することを意味する（Anger[2], Landkof[11]）．

また，この掃散の原理において ν を μ の K 上への掃散測度という．この事実はポテンシャル論の重要な結果として，多くの研究課題の解決発展に内容的に貢献している（二ノ宮[15]，岸[10]，Anger[2]，Landkof[11]）．しかし，上の原理において逆に $\partial\Omega$ 上に台 supp (ν) をもつ測度 ν を与えた時，先の 2 の条件 (a), (b) を満たすような測度 μ が存在するかを考察することは自然な発展的問題である．一般にそのようなことは成立するとは言えない．そこで，領域 Ω や核 ϕ 等にある種の条件が付加されることによつて測度 μ の存在が可能である．また，このような測度 μ のもつ性質について考察することは興味がある（Anger and Czerner[4], Schulze[16], Karr[9]）．

この報告では，上記のことについて調べ得られた結果について述べる．

内容を一般的にするために，公理論的調和空間上で考察する．X を Bauer[5] の意味での P-調和空間 (*strongly harmonic space*) とする．X 上で有限連続で，X のコンパクトな集合の外では調和であるポテンシャルの集合を $\mathfrak{P}^c$ で示す．Λ を X 上の非負の Radon 測度 λ, $\int p d\lambda < \infty$ $(p \in \mathfrak{P}^c)$ の集合を表すことにする．X の相対コンパクトな開集合 U と Λ の測度 λ に対して，

$$(1.1) \qquad \int p d\nu = \int \hat{R}_p^{CU} d\mu \quad (p \in \mathfrak{P}^c)$$

をみたす測度 μ は ν の逆掃散測度と言われる．ここ

京都府立大学生活科学部応用数学研究室
Department of Applied Mathematics, Faculty of Living Science, Kyoto Prefectural University.

で $\hat{R}_p^{CU}$ はポテンシャル p の CU 上への掃散である．測度 ν に対して，μ の存在は必ずしもただ一つではない．いま，Λ の測度 ν，supp $(\nu)\subset\partial U$，全質量 $\|\nu\|\leqq 1$ に対して，(1.1) 式をみたすような測度 μ の族を考える：

$$M(\nu)=\left\{\mu:\begin{array}{l}\mu\in\Lambda,\ \mathrm{supp}(\mu)\subset\bar{U},\ \|\mu\|\leqq 1\\ \int p d\nu=\int \hat{R}_p^{CU}d\mu\quad (p\in\mathfrak{P}^c)\end{array}\right\}.$$

この報告では，$M(\nu)$ のもつ性質について述べ，また $M(\nu)$ に属する測度の存在について具体的な例について考察する．昭和59年度日本数学会での講演（村澤[14]）に続くものである．

§2. 定義と準備

X は局所コンパクトな Hausdorff 空間で可付番個の基底をもつ，$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(X)$ は X 上で定義された連続関数のなす族で層 (sheaf) を構成している．$(X,\mathfrak{H})$ は Bauer[5] の意味の P-調和空間をなすものとする．さらに，公理："定数は調和関数である"を仮定することにする．

X の開集合 E に対して，∂E の E の境界を，$\bar{E}$ は $E\cup\partial E$ を各々示すことにする．開集合 E に対して，X の開集合 E' で $E'\subset\bar{E}'\subset E$ をみたすような集合の族を $\mathfrak{U}(E)$ で示す．

X の集合 E 上で定義された連続関数，調和関数，優調和関数の各々の族を $C(E)$，$\mathfrak{H}(E)$，$\mathfrak{S}(E)$ で示すことにする．X 上で定義された関数 f の E 上への制限を $f|E$ と書く．次のよう関数族を定義する：X の開集 U，V，$\bar{U}\subset V$ に対して

$$\mathrm{H}(\bar{U})=\{h:h\in C(V)\ \text{かつ}\ h|U\in\mathfrak{H}(U)\},$$
$$\mathrm{S}(\bar{U})=\{u:u\in C(V)\ \text{かつ}\ u|U\in\mathfrak{S}(U)\},$$
$$\mathfrak{P}=\left\{p:\begin{array}{l}p\in C(X)\ \text{かつ}\ X\ \text{上で有限なポテンシャル}\end{array}\right\}$$

X の境界 ∂U が空でない開集合 U と ∂U 上の連続関数 f に対するデイリクレ問題の解を H_f^U と書く．もし U の境界点 x が

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in U}}\mathrm{H}_f^U(y)=f(x)$$

をみたすとき，点 x のことを正則点 (regular poimt) と言われる．特に境界 ∂U がすべてこのような正則点からなるとき，集合 U は正則な集合 (regular set) と呼ぶ．X 上で定義された関数 u で条件：

(a) X 上で下半連続，
(b) $-\infty<u\leqq+\infty$，
(c) X の任意の正則な集合 V と ∂V 上の連続関数 f に対して，∂V 上 $f\leqq u$ ならば，V で $\mathrm{H}_f^V\leqq u$ である

をみた関数 u のなす族を $\mathfrak{H}^*(X)$ で示すことにする．$\mathfrak{S}(x)$ の関数 u と X の部分集合 E に対して，関数

$$\mathrm{R}_u^E=\inf\{v:v\in\mathfrak{H}_+^*(X)\ \text{かつ}\ E\ \text{上で}\ u\leqq v\}$$

を定義する．但し $\mathfrak{H}_+^*(X)=\{v:v\in\mathfrak{H}^*(X)$ かつ $v\geqq 0\}$ 関数 R_u^E の X での下方正則化 (lower regularization)

$$\liminf_{y\to x}\mathrm{R}_u^E(y)$$

を $\hat{\mathrm{R}}_u^E$ で示し，関数 u の X 上への掃散と言う．

X 上で定数された全質量 $\|\mu\|\leqq 1$ なる非負の Radon 測度の全体のなす族を $\mathfrak{M}^1$ で示す．

定理 (Bauer)．μ は X 上のコンパンクトな台をもつ非負の測度とする．この時，X の集合 E に対して，連続なポテンシャル p に関して

$$\int p d\mu^E=\int \hat{\mathrm{R}}_p^E d\mu \tag{2.1}$$

なる非負の測度 μ^E が X 上に存在する．

この測度 μ^E は μ の E 上への掃散測度と呼ばれる．

例1. U は境界が空でない X の相対コンパクトな開集合にとる．U の任意の点 x で $\mathfrak{P}$ の元 p に対して，U とその境界値関数 $p|\partial U$ に関するデイリクレ問題の解は

$$\mathrm{H}_p^U(x)=\int p|\partial U d\varepsilon_x^{CU},$$

ただし，ε_x^{CU} は点 x での Dirac 測度 ε_x の CU 上への掃散測度であり，U と $x\in U$ に関する調和測度と呼ばれる．この時，p の U の補集合 CU 上への掃散関数 $\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}$ と解 H_p^U との間に，U の各点 x で，

$$\mathrm{H}_p^U(x)=\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}(x)$$

の関係が成立する．したがって，次の事が成立する：

$$\int p d\varepsilon_x^{CU}=\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}(x)=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\varepsilon_x,$$

ここで，ε_x は点 x での Dirac 測度を示す．したがって，もし $\nu=\varepsilon_x^{CU}$ と考えるならば，測度 ν の台は supp $(\nu)\subset\partial U$ であり，全質量 $\|\nu\|=1$ なる非負の測度であるから，ε_x は $M(\nu)$ に含まれる．

上述のことを，一般的に次のようにまとめられる．

定理1. U は正則点からなる境界をもつ X の相対コンパクトな開集合とする．ν は Λ に属してコンパクトな台 $\mathrm{supp}(\nu)\subset\partial U$ をもつ非負の測度，μ はコンパクトな台 $\mathrm{supp}(\mu)$ (K で示す) $\subset U$ をもつ非負の測度とする．もし μ と ν との間に関係

$$\int p d\nu=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\mu$$

をみたす時，X 上の非負の測度 δ が存在し次の性質をもつ：

- 台 $\mathrm{supp}(\delta)\subset\bar{U}$
- $\mathfrak{P}^c$ の各元 p に対して $\int p d\nu=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\delta$,
- δ は μ と異なる測度である．

（証明）　いま，ω を $K\subset\omega\subset\bar{\omega}\subset U$ をみたす X の相対コンパクトな開集合とする．ω の境異上に測度 μ の掃散測度を考える．つまり，$\mathfrak{P}^c$ の任意の元 p に対して

$$\int p d\delta=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{C\omega} d\mu$$

が成立するように，X 上の非負の測度 δ が得られる．この時，測度 δ の台は $\partial\omega$ に含まれている．また，ポテンシャル p の CU 上への掃散関数 $\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}$ は X 上でポテンシル，U 上で調和な関数であり，

$$\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}=\mathrm{H}_p^U$$

である．定理の (2.1) 式において，ポテンシル p の代りに関数 $\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}$を取る．つまり

$$\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} \mathrm{d}\delta=\int \hat{\mathrm{R}}^{C\omega}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}} d\mu. \tag{2.2}$$

他方，コンパクト集合 K 上において

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{R}}^{C\omega}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}}(x)&=\mathrm{H}^{\omega}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}}(x)\\&=\int_{\partial\omega}\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}(y)\mathrm{d}\varepsilon_x^{C\omega}(y)\\&=\int_{\partial\omega}\mathrm{H}_p^U(y)d\varepsilon_x^{C\omega}(y)\\&=\mathrm{H}_p^U(x)\\&=\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}(x)\end{aligned}$$

であるから，

$$\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\delta=\int \hat{\mathrm{R}}^{C\omega}_{\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}} d\mu=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\mu \tag{2.3}$$

をえる．すると，この定理の仮定における測度 μ と ν との関係と上の等式 (2.3) から

$$\int p d\nu=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\mu=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\delta$$

が成り立つ．よって，測度 δ は $M(\nu)$ に属する．測度 δ の台 $\mathrm{supp}(\delta)$ は $\partial\omega$ に含まれ，かつ $K\cap\partial\omega=\phi$ であるから，δ は μ と異なる測度である．

（証明完）

系2. 定理 1 の仮定のもとで，非負の測度の族 $(\mu_i)_{i\in I}$ が存在し，性質：

- $\mu_i\neq\mu_j$ $(i\neq j)$，
- 各測度 μ_i の台 $\mathrm{supp}(\mu_i)\subset\bar{U}$ $(i\in I)$，
- すべての μ_i, $i\in I$ は CU 上への同じ非負の掃散測度 ν，台 $\mathrm{supp}(\nu)\subset\partial U$, $\nu\in\Lambda$ をもつ，
- すべての μ_i, $i\in I$ は μ と相異なる

をもつ．

例2. Xにおいて正則点からなる境界をもつ相対コンパクトな開集合 U の 1 点 x からなる集合 $K=\{x\}$ を考える．ε_x を点 x での Dirac 測度，ε_x^{CU} を ε_x の CU 上への掃散測度を指すもとする．つまり，$\mathfrak{P}^c$ の各ポテンシャル p に対して

$$\int p d\varepsilon_x^{CU}=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU} d\varepsilon_x$$

が成り立っているとしよう．Xの相対コンパンクトな集合 ω を $K\subset\omega\subset\bar{\omega}\subset U$ をみたすように取り，K 上の Dirac 測度 ε_x の $C\omega$ 上への掃散測度 $\varepsilon_x^{C\omega}$ を作る．すると，

$$\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU}|\partial\omega d\varepsilon_x^{C\omega}=\int \mathrm{H}_p^U|\partial\omega d\varepsilon_x^{C\omega}=\mathrm{H}_p^U(x)=\int p d\varepsilon_x^{CU}$$

をみたす．さらにに，測度 $\varepsilon_x^{C\omega}$は非負で，台 $\mathrm{supp}(\varepsilon_x^{C\omega})\subset\partial\omega\subset\bar{U}$，全質量 $\|\varepsilon_x^{C\omega}\|=1$ であるから，$\varepsilon_x^{C\omega}$ は常に$M(\varepsilon_x^{CU})$ に属する．特に $\varepsilon_x^{C\omega}$ は ε_x とは異なる．

§3. $M(\nu)$ の特徴づけ

この節では，U は X の相対コンパクトな開集合で，その境界 ∂U は正則点からなっている正則な集合とする．関数族 $\mathrm{H}(\bar{U})$, $\mathrm{S}(\bar{U})$ と測度の族 $M(\nu)$ との間に次のような関係をえる．この事実は，確率論的な Karr[9] の結果の公理論的調和空間上への自然な拡張である．

定理3. ν は Λ の元で，台 $\mathrm{supp}(\nu)\subset\partial U$ を有する測度とする．この時，全質量が有界で，台 $\mathrm{supp}(\mu)\subset\bar{U}$ をもつ非負の測度 μ に対して，次の命題は同値である：

(a)　$\mu\in M(\nu)$,

(b)　$\mathrm{H}(\bar{U})$ の各元 h に対し，$\mu(h)=\nu(h)$,

(c)　$\mathrm{S}(\bar{U})$ の各元 u に対し，$\mu(u)\geqq\nu(u)$.

（証明）　(b)→(a) について．$\mathfrak{P}^c$ の任意の有限連続なポテンシャルに対して，関数 $\mathrm{H}^U_{p|\partial U}$ は U で調和であり，また，∂U は正則点から成っているから，(b)によってそれは $\mathrm{H}(\bar{U})$ に属する．したがって

$$\int \mathrm{H}^U_{p|\partial U}\,d\nu=\int \mathrm{H}^U_{p|\partial U}\,d\mu=\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_p\,d\mu$$

である．測度 ν，台 $\mathrm{supp}(\nu)\subset\partial U$ に対して，

$$\int \mathrm{H}^U_{p|\partial U}\,d\nu=\int p\,d\nu$$

であるから，

$$\int p\,d\nu=\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_p\,d\mu$$

をうる．したがって，μ は $M(\nu)$ に属することがわかる．

(c)→(b)については自明である．

(a)→(c)について．この命題を証明するために，2つの補題を必要とする．X 上の関数 f に対して，関数

$$\mathrm{R}f:=\inf\{u:u\in\mathfrak{H}^*,\ f\leqq u\}$$

を定義する．

補題4. (Constantinescu-Cornea[7])．f は調和空間 X 上で定義されたコンパクトな台 $\overline{\{x:f(x)\neq 0\}}$ をもつ正の有限な実連続関数とする．もし X が P-調和空間ならば，この時 $\mathrm{R}f$ は X 上で連続なポテンシャルであり，f の台の外側では調和な関数である．

また，この補題をつかって次の結果をうる．

補題5. 関数 u は $\mathfrak{H}^*_+(X)$ の元とする．X 上で定義され，u を超えず，コンパクトな集合の外では調和である連続ポテンシャルの族を $\mathfrak{P}^c(u)$ で示すことにする．この時，$\mathfrak{P}^c(u)$ は上方向に有向性 (upper direct) つまり，$\mathfrak{P}^c(u)$ の任意の元 v_1, v_2 に対して，$w\geqq v_1$ かつ $w\geqq v_2$ なる元 w が $\mathfrak{P}^c(u)$ に存在する．また，u に収束するような増加列が $\mathfrak{P}^c(u)$ に存在する．

この補題の証明は，Constantinescu-Cornea[7] と Bauer[5] を参照されたい．

定理の証明 (a)→(c) に戻る．$\mathrm{S}(\bar{U})$ の任意の元 u に対して，補題5の意味の族 $\mathfrak{P}^c(u)$ を定義する．この時，$\mathfrak{P}^c(u)$ は上方向に半順序がつき，かつ $\mathfrak{P}^c(u)$ に増加例 $\mathfrak{P}_c'(u)$が存在して，$u=\sup_{q\in\mathfrak{P}_c'(u)} q$ である．すると，

$$\int u\,d\nu=\int \sup_{q\in\mathfrak{P}_c'(u)} q\,d\nu=\sup_{q\in\mathfrak{P}_c'(u)}\int q\,d\nu$$
$$=\sup_{q\in\mathfrak{P}_c'(u)}\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_q\,d\mu\leqq\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_u\,d\mu\leqq\int u\,d\mu$$

である．(c)をえる．　　（証明完）

§4.　$M(\nu)$ の元の表現

U は X の開集合で，境界は正則点からなる．V は $V\supset\bar{U}$ をみたす X の相対コンパクトな開集合としよう．F は $C(\bar{V})$ 上の連続な線形形式：$C(\bar{V})$ の任意の元 f に対して

$$F(f)=\int f\,d\mu.$$

ただし，μ は $\mathfrak{M}_+$ の元で，台 $\mathrm{supp}(\mu)\subset\bar{V}$ を有する．$C(\bar{V})$ 上のこのような線形形式の全体を $C^*(\bar{V})$ で示すことにする．さらにノルム $\|\mu\|$ が有限，つまり

$$C(\bar{V})\text{ の元 }f\text{ に対し，}\|\mu\|:=\sup_{\|f\|\leqq 1}\left|\int f\,d\mu\right|\leqq 1$$

なる $\mathfrak{M}_+$ の元の族を $\mathfrak{M}^1_+$ の記号で示す．

もし＊弱位相 (weak * topology) をもった空間 $C^*(\bar{V})$を考えるならば，空間 $C(\bar{V})$ が可分 (separable) であるから，$C^*(\bar{V})$ の $\mathfrak{M}^1_+$ 上の＊弱位相は距離付可能 (metrizable) である．さらに，この位相に関して $\mathfrak{M}^1_+$ はコンパクトであることはよく知られている (Dunford and Schwartz[8])．

先に考察した族 Λ の元 ν が全質量 $\|\nu\|\leqq 1$ で，台 $\mathrm{supp}(\nu)\subset\partial U$ なるとき，ν の族 $M(\nu)$ に関して次の結果をうる．

定理6. 族 $M(\nu)$ は凸距離付可能なコンパクトな集合である．

（証明）凸性について．$M(\nu)$ の任意の元 μ_1, μ_2 $(\mu_1\neq\mu_2)$ に対して，測度 $t\mu_1+(1-t)\mu_2$ $(0<t<1)$ は $M(\nu)$ に属する．事実，

$$\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_p\,d(t\mu_1+(1-t)\mu_2)$$
$$=t\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_p\,d\mu_1+(1-t)\int \hat{\mathrm{R}}^{CU}_p\,d\mu_2$$
$$=t\int p\,d\nu+(1-t)\int p\,d\nu$$
$$=\int p\,d\nu$$

である．距離付可能性については，$M(\nu)$ が $\mathfrak{M}^1_+$ の部分集合であり，かつ，$C^*(\bar{V})$ で導入された位相をもつことから得られる．最後に，$M(\nu)$ のコンパクト性を証明しよう．そのためには，$C^*(\bar{V})$ がさきの位相

に関してコンパクトであるから，$M(\nu)$ が $C^*(\bar{V})$ で閉集合であることを示せばよい，いま，$M(\nu)$ の測度列 (μ_k) で，$C^*(\bar{V})$ における＊弱位相に関して μ に収束（漠収束）するもの，つまり $C(\bar{V})$ の任意の元 f に対して

$$\lim_{k\to\infty}\int f d\mu_k=\int f d\mu \tag{4.1}$$

かつ $\mu\in C^*(\bar{V})$ なるものを考える．すると，$\mu_k\in M(\nu)$ であるから，

$$\|\mu\|=\int d\mu=\lim_{k\to\infty}\int d\mu_k=1$$

である．よつて $\mu\in\mathfrak{M}_+^1$ であることがわかる．一方，∂U の点の正則性により，$\bar{U}$ 上で，

$\mathfrak{P}^c$ の任意の元 p に対して，$p(y)=\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\in U}}\mathrm{H}_p^U(x)$

であり，$\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}(x)=\mathrm{H}_p^U(x)$ である．

次に，関数

$$g(x):=\begin{cases}\mathrm{H}_p^U(x) & (x\in U)\\ p(x) & (x\in\bar{V}-U)\end{cases}$$

を定義すると，$g\in C(\bar{V})$ である．したがって

$$\int_{\bar{U}}\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu_k=\int_{\bar{U}}\mathrm{H}_p^U d\mu_k=\int g d\mu_k \tag{4.2}$$

であるから，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\bar{U}}\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu_k=\lim_{k\to\infty}\int g d\mu_k=\int g d\mu \tag{4.3}$$

をえる．しかし，測度 μ_k の台 $\mathrm{supp}(\mu_k)$ は $\bar{U}$ に含まれているから，μ の台 $\mathrm{supp}(\mu)$ は $\bar{U}$ に含まれる．さもないと，列 (μ_k) は漠収束に関して μ に収束しない．よつて

$$\int g d\mu=\int_{\bar{U}}g d\mu=\int_U \mathrm{H}_p^U d\mu=\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu \tag{4.4}$$

であり，また (4.3) を使つて

$$\lim_{k\to\infty}\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu_k=\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu \tag{4.5}$$

である．ここで，測度 ν と μ_k との間には条件

$$\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu_k=\int p d\nu \tag{4.6}$$

であるから，(4.5) 式とを合せて

$$\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu=\int p d\nu$$

をえる．このことは $\mu\in M(\nu)$ を示している．つまり，$M(\nu)$ は $C^*(\bar{V})$ において＊弱位相に関して閉じていることがわかる．（証明完）

定義. 凸集合 $M(\nu)$ の元 μ は，もし $\mu=t\mu_1+(1-t)\mu_2$ $(\mu_1,\mu_2\in M(\nu),\ 0<t<1)$ ならばつねに $\mu_1=\mu_2$ となるとき，端点 (extreme point) であると言われる．$M(\nu)$ のすべての端点からなる集合を $\mathrm{ex}\,M(\nu)$ で表す．

定理7. $\mathrm{ex}\,M(\nu)$ は G_δ-集合である（Alfsen[1]）．

定理8. 族 $M(\nu)$ の任意の元 μ に対して，次の命題は同値である：

(a) μ が $\mathrm{ex}\,M(\nu)$ に属する，

(b) $M(\nu)$ の元 λ であり，$\lambda\neq\mu$ かつ $\lambda(\mathrm{supp}(\mu))=1$ となるものは存在しない．

（証明）(a)→(b) について．測度 $\mu\in M(\nu)$ の台を $K=\mathrm{supp}(\mu)$ とする．いま(b)が成立しないとすれば，$M(\nu)$ の元 λ を適当にとると，$\lambda\neq\nu$ かつ $\lambda(K)=1$ とすることができる．そこで，K は有限集合だから，正数 $t\,(0<t<1)$ を適当に取り測度

$$\eta:=\frac{1}{1-t}(\mu-t\lambda) \tag{4.7}$$

を定義することができる．この時 η は $\mathfrak{M}_+^1$ に属する．$\mathfrak{P}^c$ の任意のポテンシャル p に対して

$$\begin{aligned}\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\eta&=\frac{1}{1-t}\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d(\mu-t\lambda)\\&=\frac{1}{1-t}\left\{\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu-t\int\hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\lambda\right\}\\&=\int p d\nu\end{aligned}$$

である．よつて，η は $M(\nu)$ に属する．η の定義から η は λ と異なり，さらに μ は

$$\mu=t\lambda+(1-t)\eta$$

と表すことができる．この事実は(a)に相反する．

(b)→(a)について．やはり，(a)は成立しないと仮定することにする．定数 t を $0<t<1$ がみたされるように適当にとると，測度 μ は $t\mu_1+(1-t)\mu_2$，$(\mu_1,\mu_2\in M(\nu),\ \mu_1\neq\mu_2)$ の形で表される．ここで，μ_1 と μ_2 は非負の測度であるから，$\mu\geqq t\mu_1$ が成立する．したがって，任意のボレル集合 $A\,(\subset\bar{U})$ に対して $\mu(A)=0$ ならば $\mu_1(A)=0$ であり，かつ，$\|\mu\|=\|\mu_1\|=1$ である．よつて $K=\mathrm{supp}(\mu)$ に対して，$\mu_1(K)=1$ が成り立つ．(b)は成立しないことになり，矛盾する．（証明完）

命題9. U は正則境界点からなる境界をもつ X の

相対コンパクト開集合とする．x は U の任意の点とする．この時，$\mathfrak{U}(U)$ の任意の相対コンパクトな開集合 U', $x\in U'$ に対して

$$\varepsilon_x^{CU'}\in \mathrm{ex}\, M(\varepsilon_x^{CU})$$

が成立する．ただし，$\varepsilon_x^{CU'}$ は点 x の Dirac 測度 ε_x の CU' への掃散測度を示す．

（証明）測度 $\varepsilon_x^{CU'}$ の台 supp $(\varepsilon_x^{CU'})$ は $\partial U'$ 上に載っているから，さきの定理8の(b)が成立することを示せば十分である．いま $M(\varepsilon_x^{CU})$ の元 μ で，$\mu(\partial U')=1$ かつ $\mu\neq\varepsilon_x^{CU'}$ をみたすものが存在しているとする．$\mathfrak{P}^c$ の任意の元 p に対して

$$(4.8)\qquad \mathrm{H}_p^U(x)=\int p\,d\varepsilon_x^{CU}=\int \hat{\mathrm{R}}_p^{CU}d\mu$$
$$=\int \mathrm{H}_p^U d\mu=\int_{\partial U'}\mathrm{H}_p^U d\mu$$

である．また，

$$(4.9)\qquad \mathrm{H}_p^U(x)=\int_{\partial U'}\mathrm{H}_p^U d\varepsilon_x^{CU'}$$

であるから，

$$(4.10)\qquad \int_{\partial U'}\mathrm{H}_p^U d\mu=\int_{\partial U'}\mathrm{H}_p^U d\varepsilon_x^{CU'}$$

をえる．一方 μ の条件から $\mu\neq\varepsilon_x^{CU}$ であるから，$C(\bar{U})$ の任意の元 f に対して

$$\int f d\mu\neq\int f d\varepsilon_x^{CU'}$$

である．いま $f=\mathrm{H}_p^U$ とおくと

$$\int \mathrm{H}_p^U d\mu\neq\int \mathrm{H}_p^U d\varepsilon_x^{CU'}$$

となり，前出の式 (4.10) と相反する．　（証明完）

注意． Brelot の意味での P-調和空間 X においては，正則な境界点からなる境界をもつ相対コンパクトな開集合 U と U の任意の点 x に対して，次の測度の族

$$\{\varepsilon_x^{CV}: V\in\mathfrak{U}(U),\ x\in V,\ \partial V \text{ は正則点からなる}\}$$

は $\mathrm{ex}\, M(\varepsilon_x^{CU})$ に含まれる．

族 $M(\nu)$ 上に関数 $\phi: \mu\in M(\nu)\to\phi(\nu)$ を定義する．もし $M(\nu)$ で μ_n が μ に漠収束するならば，$\phi(\mu_n)$ が $\phi(\mu)$ に収束するとき，関数 ϕ は連続であるということにする．このような $M(\nu)$ 上の連続関数の全体のなす族を $\mathfrak{L}(M(\nu))$ で示す．さらに，$\mathfrak{L}(M(\nu))$ の元 ϕ が，$M(\nu)$ の任意の2つの元 μ_1, μ_2 と実数 t $(0\leqq t\leqq 1)$ に対して，等式

$$\phi(t\mu_1+(1-t)\mu_2)=t\phi(\mu_1)+(1-t)\phi(\mu_2)$$

をみたす時，関数 ϕ はアフィン (affine) と言われる．Choquet の定理により，この節の目標である $M(\nu)$ の元の積分表現が得られる (Alfsen[1])．

定理10. U は X の相対コンパクトな開集合で，その境界 ∂U は正則点からなるものとする．V は $\bar{U}$ の開近傍を示す．この時，$M(\nu)$ の任意の元 μ_0 に対して，$M(\nu)$ 上に測度 m がただ一つ存在して次の条件をみたす：

$$\begin{cases} \bullet\ m(M(\nu)\setminus \mathrm{ex}\, M(\nu))=0, \\ \bullet\ M(\nu) \text{ 上のアフィン連続関数 } \phi \text{ に対して} \\ \qquad \phi(\mu_0)=\int\phi(\mu)dm(\mu). \end{cases}$$

（証明）集合 $M(\nu)$ は $C^*(V)$ の凸路離付可能なコンパクト集合であるから，Choquet の定理（竹之内他[18]，Alfsen[1]）の条件が満足される．したがって上の結果が容易に得られる．　（証明完）

§5. 例

u 次元ユークリッド空間 $\mathrm{R}^n(n\geqq 2)$ 上の2回連続微分可能な関数のなす族を $C^2(\mathrm{R}^n)$ と書き，Δ は R^n の点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ における Laplace 作用素 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ を示すことにする．R^n 上の調和関数の族 $\{u: u\in C^2(\mathrm{R}^n)$ かつ，$\Delta u=0\}$ を $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(X)$ と表すことにする．この時，$(\mathrm{R}^n, \mathfrak{H})$ は Bauer の意味の調和空間をなす．いま，R^n 上には正のポテンシャルが存在するものと仮定しておくことにする．

R^n の2点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$ に対して

$$|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$$

とおき，x, y の距離と呼ぶ．点 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ を中心とする球を考える：半径を各々 $R_0, 2R_0$ とする球を

$$U=\{x:\ |a-x|<R_0\}$$
$$V=\{x:\ |a-x|<2R_0\}$$

とすると，$U\subset\bar{U}\subset V$ である．閉球 $\bar{V}$ 上で定義された次の関数族

$$\mathrm{H}(\bar{U})=\{h: h\in C(\bar{V}) \text{ かつ } h|U\in\mathfrak{H}(U)\}$$

を考える．点 a における Dirac 測度 ε_a の CU 上の掃散測度 ε_a^{CU} を ν で示す．定理1と定理3により，ν に関する測度の族 $M(\nu)$ は，

$$\left\{\mu:\begin{array}{l}\mu\in\mathfrak{M}^+(\bar{V}),\ \|\mu\|<1,\ \mathrm{supp}\,(\mu)\subset\bar{U}\\ \mathrm{H}(\bar{U})\ \text{の任意の元}\ h\ \text{に対して}\ \nu(h)=\mu(h)\end{array}\right\}$$

の形に書ける。実数 $r\,(0<r<R_0)$ に対して，球

$$U_a^r=\{x:\ 0<|a-x|<r\}$$

を考える．球 U_a^r は U の部分集合で，r を0から R_0 の間で動かすことによりいくつも構成できる．このような球の族を $\mathfrak{B}(a,R_0)$ で示す．

調和関数に関する平均値の原理（mean-value principle）を使うことにより，任意の実数 $r\,(0<r<R_0)$ に対して，$\mathrm{H}(\bar{U})$ の各関数 h の点 a での値は

$$h(a)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial U_a^r}h(x)ds(x)$$

で与えられる．ただし，ds は閉球 $\bar{U}_a^r$ の表面上の曲面積分を表す，また $\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ は単位球 $\{x:\ |a-x|=1\}$ の表面積を示し，$\Gamma(n)$ はガマン関数である．さらに，点 a における Driac 測度の CU_a^r への一様分布によって得られる測度（掃散測度）を μ_a^r で示すことにする．次のような関係をえる：

- 関数 h に対して $\mu_a^r(h)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial U_a^r}h(x)ds(x)$,
- μ_a^r は$\bar{U}$上の非負の測度である，
- 全質量$\|\mu_a^r\|=1$,
- 台 $\mathrm{supp}\,(\mu_a^r)\subset\bar{U}_a^r\subset U$.

ここで $\mu_a^r(h)$ は $\int h d\mu_a^r$ の意味である．したがって，任意の実数 $r\,(0<r<R_0)$ に対して，$\mathrm{H}(\bar{U})$ の各元 h は

$$\nu(h)=\int h d\varepsilon_a=h(a)=\mu_a^r(h)$$

をみたす．つまり，各 $r\,(0<r<R_0)$ に対して μ_a^r は $M(\nu)$ に属す．特に，掃散の原理により，各 $r\,(0<r<R_0)$ に対して測度 μ_a^r は ∂U_a^r に載りただ一つ決まる．つまり，各々 r_1,r_2, $0<r_1<R_0$, $0<r_2<R_0$ $(r_1\neq r_2)$ に対して各々 $\mu_a^{r_1}$, $\mu_a^{r_2}$ $(\mu_a^{r_1}\neq\mu_a^{r_2})$ が決まるから，対応

$$\Psi:r\to\mu_a^r$$

は，実数区間 $(0,R_0)$ から $M(\nu)$ への1対1対応である．したがって，r が0に収束するとき，μ_a^r は ε_a に漠収束する．また，r が R_0 に収束する時，μ_a^r は ε_a^{CU} に漠収束する．そこで，$r\,(0<r<R_0)$ に対する μ_a^r の族を

$$M_1(\nu)=\{\mu_a^r:\ \mu_a^r\in M(\nu),\ 0<r<R_0\}$$

で示す．さらに，区間 $(0,R_0)$ の部分区間から成る Borel 集合族を $\mathfrak{A}(0,R_0)$ で表す．$\mathfrak{A}(0,R_0)$ 上に測度 m を次のように定義する：$\mathfrak{A}(0,R_0)$ の任意の元 G に対して

$$m(A)=\int_{\Psi^{-1}(G\cup M_1)}\rho(r)dr$$

とおく．ただし，$\rho(r)$ は閉区間 $[0,R_0]$ 上で定義された連続関数で，

$$\int_0^{R_0}\rho(r)dr=1$$

をみたすものとする．すると，$C(\bar{V})$ 上の汎関数

$$\delta:f\to\int_0^{R_0}\mu_a^r(f)dm(r),\ (f\in C(\bar{V})$$

は，測度 $\delta\in\mathfrak{M}^1$ を定義して，性質

- 全質量 $\|\delta\|=1$,
- 台 $\mathrm{supp}\,(\delta)\subset\bar{U}$

をもつ．さらに，平均値の原理により，各 $h\in\mathrm{H}(\bar{U})$ に対して，

$$\begin{aligned}\delta(h)&=\int_0^{R_0}\mu_a^r(h)dm(r)\\&=h(a)\int_0^{R_0}\rho(r)dr\\&=h(a)\\&=\nu(h)\end{aligned}$$

をえる．したがって，定理3により $\delta\in M_1(\nu)$ である．

注意．特に，$\rho(r):=nr^{n-1}/R_0^n$ とするならば，$C(\bar{V})$ の任意の元に対して

$$\begin{aligned}\delta(f)&=\int_0^{R_0}\mu_a^r(f)dm(r)\\&=\int_0^{R_0}\left(\int_{\partial U_a^r}f(x)d\mu_a^r(x)\right)dm(r)\\&=\int_0^{R_0}\left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial U_a^r}f(x)ds(x)\right)\frac{nr^{n-1}}{R_0^n}dr\\&=\frac{1}{\omega_n}\frac{n}{R_0^n}\int_0^{R_0}\int_{\partial U_a^r}f(x)ds(x)dr\\&=\frac{1}{V_nR_0^n}\int_U f(t)dt\end{aligned}$$

である．ここで，$V_n=\omega_n/n$ を示す．したがって，測度 δ は球 $\bar{U}$ 上の体積積分の形によって決まる．

（1985年8月13日受理）

文　献

1) E. M. Alfsen: Compact convex sets and boundary integrals, Springer-Verlag, 1971.
2) G. Anger: Funktionalanalytische Bertrachtun-

gen bei differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie I, Akademie-Verlag, 1967.

3) G. Anger: Unsolved Problem in inverse theory. Preprint der Sektion Mathematik Nr. 85, Martin-Luther-Universität, 1983.

4) G. Anger and R. Czerner : The extreme measures in the inverse problems of the heat equation. From the conference "Elliptische Differentialgleichungen", Rostook, 1977.

5) H. Bauer : Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecrure Notes in Math., **22**, Springer-Verlag, 1966.

6) C. Constantinescu : Some Properties of the balayage of measures on a harmonic space, *Ann, Inst. Fourier, Grenoble,* **17**, 273-293, 1967.

7) C. Constantinescu and A. Cornea : Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer-Verlag, 1972.

8) N. Dunford and J. T. Schwartz : Linear operaors Part I : General Theory, Wily, 1958.

9) A. F. Karr : The inverse balayage problem for Markov chains, *Stochastic Processes and their Applications*, **7**, 165-178, 1978.

10) 岸 正倫：ポテンシヤル論，森北出版，1974.

11) N. S. Landkof : Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, 1972.

12) J. Lukes and I. Netuka : The Wiener type solution of the Dirichlet Problem in Potential Theory, *Math. Ann.*, **224**, 173-178, 1976.

13) G. Mokobodzki : Principe de balayage, Principe de domination, Séminaire Choquet (Initiation á L'analyse) **1** re année, no° 1, 1962.

14) 村澤忠司：調和空間での逆掃散測度について，日本数学会講演（昭和59年年会）アブストラクト.

15) 二ノ宮信幸：ポテンシヤル論，共立出版，1969.

16) B.-W. Schulze : Über das inverse Problem beim Laplace-Operator, *Math. Nach.*, **67**, 225-235, 1975.

17) B.-W. Schulze und G. Wildenhain : Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Birkhäuser Verlag, 1977.

18) 竹之内脩，阪井 章，貴志一男，神保敏弥：関数環，培風館，1977.