毎木調査による林分胸高断面積測定の誤差に関する研究*

大　隅　真　一

SHINICHI OSUMI : Studies on the errors affecting the determination of the stand basal area in the complete inventory

摘　要　本研究は，毎木調査による林分胸高断面積測定の際に生起する誤差の解析ならびに評価の問題をとり扱つたものである．研究の結果，種々の誤差のなかで，もつとも重視すべきは測り落しの誤差および輪尺誤差であつて，偶然測定誤差および括約誤差等は，一般に，林分胸高断面積の精度にはほとんど影響を及ぼさないことが明らかとなつた．

緒　　論

1.　毎木調査の対象としての林分

林分はある特定の面積を占める樹木の集団である．林分の構成要素たる林木の直径分布は次のように分類される．

一斉林型：正規型直径分布，Charlier-A 型直径分布，Pearson-I 型直径分布．

択伐林型：Meyer 型（指数型）直径分布．

天然生林：不規則下降型直径分布．

2.　毎木調査における誤差の分類

過失誤差：読み違え，聞き違え，書き違え，測り落し，二重測り，その他．

系統的誤差：輪尺誤差．

偶然誤差：偶然測定誤差，括約誤差．

3.　研究方法および内容

上記の分類にしたがつて，まず過失誤差および系統的誤差について述べ，ついで偶然測定誤差，括約誤差の順に考察を進め，最後にこれらを総合する．

第1章　毎木調査における過失誤差と系統的誤差

1.　過　失　誤　差

過失誤差のうちもつとも重要なのは測り落しの誤差であつて，つねに負の誤差として作用する．測り落しは全直径階を通じて同じ割合で生起し，したがつて本数誤差率はそのまま林分胸高断面積および林分材積誤差率として作用する．その大きさは一般に2％前後とみられるが，ときには人工林においてさえ6～7％に達することがある．上り法においては下り法におけるよりも，測り落しの誤差率ははるかに小さい．

二重測りの誤差は一般に非常に小さく，問題とするに足りない．

2.　輪　尺　誤　差

系統的誤差としての輪尺誤差は，主として遊動脚が固定脚に平行でないために生ずる誤差である．尺度の内側を基準として遊動脚の長さを l，先端での開差を δ とすると，断面積輪尺誤差率は次式で与えられる：

$$\Delta_{kg}(\%)=-100\delta/l.$$

第2章　毎木調査における偶然測定誤差

1.　概　　要

従来の研究では，偶然測定誤差を，方向誤差，測定高誤差，輪尺の傾きによる誤差，輪尺脚の傾きによる誤差の4つの成分誤差に分け，ある種の仮定の下に理論的考察を行うことが多かつた．これに対し本研究では，実験的にこれらの成分誤差の比重ならびに偶然測定誤差の大きさに対する評価基準を明らかにする．

2.　偶然測定誤差の解析

偶然測定誤差に対する上述の諸要因の作用を解析するためには，まずこれらの要因のおのおのの影響を何らかの方法で規制する必要がある．

a）実　験　計　画

上述の目的のため，樹幹上輪尺をあてる部位ならびに方法を次のように規定する（表（2-1）参照）．

A：樹幹上に何らの印付も行なわず，測者は単に山側から胸高における直径を測定するよう指示される．

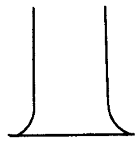
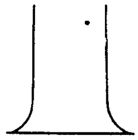
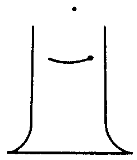
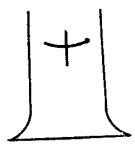
B：輪尺の尺度が樹幹と接すべき接点を含み，幹軸に直交する横断面が，樹幹表面を切る線上やや右寄りに点を付す．測者は測定にあたつて，輪尺がこの高さに保持されるよう指示される．

C：Bで付した点および輪尺尺度と樹幹との接点を通り，それを中心として約10 cm の水平線を引く．測者は測定にあたつて，輪尺の尺度が必ずこの線上に

京都府立大学農学部森林経理学研究室

* この報告は，同じ論題の下に書かれた原論文の要旨をその構成に従つて概述したものである．

表 (2-1)　印付およびそれによつて規制せられる要因

記号	印付	規制せられる要因
A		(A) ＝ 0
B		(B) － (A) ＝測定高
C		(C) － (B) ＝輪尺の傾き (C) － (A) ＝{(C) － (B)}＋{(B) － (A)} ＝輪尺の傾き＋測定高
D		(D) － (C) ＝測定方向 (D) － (A) ＝{(D) － (C)}＋{(C) － (B)} ＋{(B) － (A)}＝測定方向＋輪尺の傾き＋測定高

水平に保たれるよう指示せられる．

D：Cで付した線を接点で直角に切るように，約5 cm の短い縦線を引き，全体として十字形の印を付す．測者は測定にあたつて，輪尺の尺度が必ずこの十印の中心において樹幹に接し，しかも尺度が横線上にあつて水平に保たれるよう指示せられる．

以上の規定を，実験計画ならびに要因分析上 "印付A" 等と呼ぶことにする．

一般の毎木調査の場合を測定試験に再現するための実験計画として，本研究においては供試木を100本とし，次のような組合せによる三元要因配置の下に繰り返し測定を行い，共分散分析を適用することとした．

測者：4名（それぞれに記帳者を配す），

輪尺：2本（mm 目盛），

印付：4種類（A，B，C，D）．

（b）試験地の概況と試験の方法

（i）試験地の概況

京都大学芦生演習林スギ天然生林（芦生試験林分）．

京都府立大学大野演習林スギ人工林（大野試験林分）．

両試験林分共に，供試木100本を団塊的に選び，それぞれの幹に番号を付した．

（ii）要因配置ならびに測定方法

両試験林分共に同じ方法によつたが，使用した測者，記帳者および輪尺は同一ではない．芦生試験林分ではスライド式真鍮製ミリメートル輪尺2本を用い，大野試験林分ではスライド式ジュラルミン製ミリメートル輪尺1本およびミリメートル目盛の中堀式輪尺1本を使用した．芦生試験林分における要因の組合せは図 (2-1) の通りである．大野試験林分もこれに準ずる．

実施にあたつては測者1名に記帳者1名を配した．測定値はミリメートル単位で読みとられた．測定は印付の種類に従つて，A，B，C，Dの順序に行なわれた．

（c）測定結果についての共分散分析—測定値の系統的偏り

上述の試験の結果として，両試験林分共に各供試木

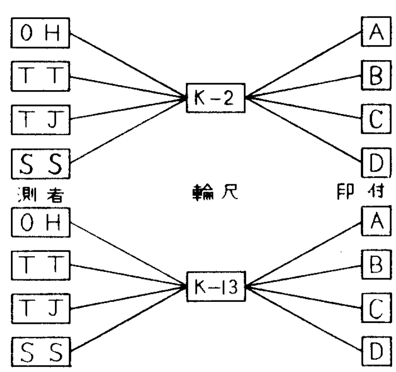


図 (2-1) 要因の組合せ（芦生試験林分）

それぞれ32個延3200個の測定値が得られた．解析するためには，これらの実測値をそのまま用いるより

表 (2-2)　分　散　分　析　表 (芦生)

要　因	自由度	平方和	分　散	F
測　者 (B)	3	5.0119	1.6706	13.17**
輪　尺 (Q)	1	0.1432	0.1432	1.13
印　付 (W)	3	20.0423	6.6808	59.68**
B×Q	3	1.0289	0.3430	2.70*
B×W	9	5.4991	0.6110	4.82**
Q×W	3	0.8082	0.2694	2.12
B×Q×W	9	0.8442	0.0938	0.74
回　帰	32	10.2339	0.3198	2.52**
誤　差 (E)	3136	397.6370	0.1268	
計	3199	441.2487		

表 (2-3)　分　散　分　析　表 (大野)

要　因	自由度	平方和	分　散	F
測　者 (B)	3	13.0203	4.3401	20.6**
輪　尺 (Q)	1	465.2317	465.2317	2210.0**
印　付 (W)	3	39.7069	13.2356	62.9**
B×Q	3	5.4979	1.8326	8.7**
B×W	9	12.3409	1.3712	6.5**
Q×W	3	7.6543	2.5514	12.1**
B×Q×W	9	9.3114	1.0346	4.9**
回　帰	32	48.5793	1.5181	7.2**
誤　差 (E)	3136	659.8557	0.2105	
計	3199	1261.1984		

も，一定の基準値に対する誤差の形で示した方が取扱いに便利である．基準値としては両試験林分それぞれにもつとも正確とみなされる輪尺による印付Dの場合の測者4名の平均を用いる．

(i) 分散分析の方法

三元要因配置による分析法に，共分散分析を適用した．すなわち測定誤差の大きさと，直径自体の大きさとの間に相関が予想せられるからである．

(ii) 芦生試験林分についての測定誤差の分散分析

分析の結果を表 (2-2) に示す．分析の結果有意差を示した要因について Gap test を行うと次のようになる．

測者要因：OH>TJ=SS>TT

印付要因：A>B>C>D.

測者内印付間：OH：A=B=C>D,

TJ：A>B>C>D,

TT：A=B>C>D,

SS：A>B>C=D.

(iii) 大野試験林分についての測定誤差の分散分析

分析の結果を表 (2-3) に示す．

Gap test：

測者要因：HH>HK=SN=OT

印付要因：A<D=C<B.

測者内，輪尺内，印付間：

測者 ＼ 輪尺	K-M	K-11
HH	A<C<B=D	A=B<C=D
HK	A<B=C=D	A<B=C=D
SN	A<C<B=D	A<D<B=C
OT	A<B=C=D	A=D<B<C

(iv) 分散分析結果についての考察

測者要因：両試験林分共に，測者によつて測定誤差したがつてまた測定値の系統的偏りに差があることがわかる．これは測者の体格によつて測定高に偏りが生ずることと共に，輪尺のあて方，目盛りの読みとり等においてそれぞれに固有の癖を有するからであろう．

輪尺：芦生試験林分の場合は，いずれも同種類の正

確な輪尺を使用したため，両者間での偏りの差はみられなかつた．

大野試験林分の場合は，輪尺間の偏りには著しい差がみられるが，これは明らかに中堀式輪尺 K-11 における輪尺誤差に基づくものである．前項分散分析の過程から，この輪尺の開差率を求めると 4.7％となる．これよりとくにローラー式輪尺の場合，実際の測定においては，開差は見かけ上よりもてこの理によつてより大きくなるのではないかと推量される．少なくとも輪尺誤差は見かけ上の開差から計算された最大誤差をもつて作用すると考えてよいであろう．

印付：印付による偏りの差は両試験林分共に有意であるが，その内容は同一ではない．

芦生試験林分については次のように推論せられる：

(イ) 一般に測定高を低くとる傾向がみられる．

(ロ) 輪尺を傾斜させて保持する傾向がある．

(ハ) 測定方向に基づく偏りがみられる．このことは胸高における樹幹の横断面の正円からの偏りに方向性があることを示す．

大野試験林分については次のように推論せられる．

(イ) 一般に胸高位置を高くとり過ぎる傾向がある．これは芦生の場合と全く反対である．

(ロ) 輪尺を傾けて保持する傾向がみられる．

(ハ) 測定方向に基づく偏りは有意でない．この事実はすなわち大野試験林分では，林木の胸高断面の偏りに方向性がみられないことを意味する．

（d）偶然測定標準誤差―測定誤差の偶然的変動

前項においてとり扱つたのは，測定誤差の系統的平均的な偏りの問題であつた．本項ではこれに対し，測定誤差の偶然的変動の大きさについて考察を試みる．

方法として，前項と同じ試料を用い，まず測者および輪尺を込みにして，印付の種類別に各樹木それぞれ 8 個の測定誤差値をもつて，次式により標準誤差を計算する．

$$\sigma^2_{jk}=\frac{\sum\limits_{h}\sum\limits_{i} z^2_{hijk}}{lm}-\bar{z}^2_{jk}$$

ただし，　$$\bar{z}_{jk}=\frac{\sum\limits_{h}\sum\limits_{i} z_{hijk}}{lm}$$

つぎにこれら 100 本の測定木について，標準誤差の直径値に対する回帰を求めることによつて，標準誤差の一般的大きさを推定する．

（i）芦生試験林分における偶然測定標準誤差

標準測定誤差と，直径値との間に原点を通る直線関係を仮定し，それを印付要因別に回帰法によつて推定すると図 (2-2) のようになる．回帰係数についての検定は B-C 間を除いて有意差のあることを示し，したがつて $\sigma_A>\sigma_B=\sigma_C>\sigma_D$ であることがわかる．

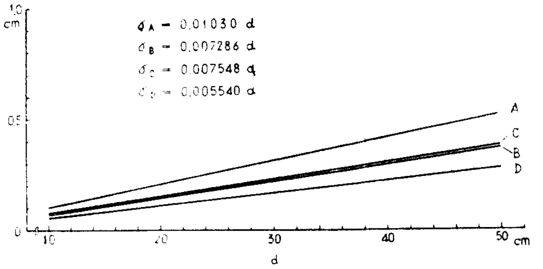


図 (2-2)　偶然測定標準誤差と胸高直径との関係　芦生 A-D

（ii）大野試験林分における偶然測定標準誤差

本試験地において使用せられた輪尺 K-11 は -2％の輪尺誤差を生起せしめたと推定されるから，これを補正したのち芦生試験林分の場合と同様の計算を行うと，図 (2-3) のような結果が得られる．回帰係数について検定を行うと芦生の場合と全く同様に，

$\sigma_A>\sigma_B=\sigma_C>\sigma_D$　なる関係が推量される．

（iii）偶然測定標準誤差に関する考察

構成および環境を全く異にする林分において，全く別個の測者によつて行なわれた両試験地の結果は，傾向的にも数値的にもよく類似していることは注目すべきである．

偶然測定誤差はほぼ直径に比例して直線的に増加する．$\sigma_A>\sigma_B$ なることから，測定高要因は系統的作用を及ぼす他に偶然的要因としても作用するといえる．

輪尺の傾きは偶然的要因としては作用しない．

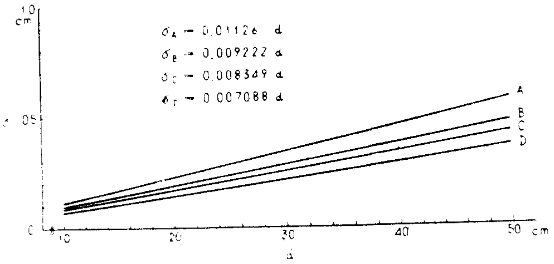


図 (2-3)　偶然測定標準誤差と胸高直径との関係　大野 A-D

$\sigma_C<\sigma_D$ であるから，方向要因は測定誤差の偶然的成分としても関与することがわかる．それは対象林木の横断面の形状の偏りに方向性があれば系統的にも偶然的にも作用し，方向性がなければもつぱら偶然的要因として作用するものと考えられる．

（e）林分の毎木調査における偶然測定誤差

以上述べた所は偶然測定誤差の解析に関することであつた．現実の毎木調査における偶然測定標準誤差率の大きさは，回帰推定によるよりも次式によつて定める方が実際的である．

$$\sigma_{(\%)}=100\sqrt{\frac{\sum d_i^2\sigma_{di}^2}{\sum d_j^4}} \cdots\cdots(2\text{-}1)$$

ただし，d_i：胸高直径，σ_{di}：単木の直径における偶然測定標準誤差．

あるいは，$$\sigma_{(\%)}=\frac{\sigma_{G(\%)}\sqrt{N}}{2\sqrt{1+C_g^2}} \cdots\cdots(2\text{-}2)$$

ただし，N：本数，C_g：断面積における変動係数，$\sigma_{G(\%)}$：林分胸高断面積における標準誤差率．

もし試験における繰り返し測定の結果として，$\sigma_{G(\%)}$ が得られれば，式 (2-2) によつて $\sigma_{(\%)}$ を定めるのが最も実際的であろう．本試験の結果ならびに過去の試験結果を総合すると，$\sigma_{(\%)}$ の値は一般に1～4％，平均2％とみられる．

林分の毎木調査では，林分胸高断面積の偶然測定標準誤差が重要である．

$$\sigma_{G(\%)}=\frac{2\sigma_{(\%)}}{\sqrt{N}}\sqrt{1+C_g^2} \cdots\cdots(2\text{-}3)$$

近似的に　$C_g\fallingdotseq 2C_d$　とおけば，

$$\sigma_{G(\%)}\fallingdotseq\frac{2\sigma_{(\%)}}{\sqrt{N}}\sqrt{1+4C_d^2} \cdots\cdots(2\text{-}4)$$

したがつてある程度本数が多くなれば，毎木調査における偶然測定誤差は重視する必要はないといえる．

第3章　毎木調査における括約誤差*

1. 概　要

括約誤差は偶然誤差の一種であつて，林分の直径分布によつてその分布型を異にする．本論文では一様，正規および Meyer 型直径分布についての括約誤差を，単木直径より林分断面積に至るまでの各階程において追求する．

2. 一様分布における括約誤差

（a）直径括約誤差

（i）単一の直径括約誤差

直径括約誤差を Δd，密度函数を $\varphi(x)$，分布函数を $f(x)$，括約単位を a とすれば，

$$\left.\begin{array}{l} x\leqq-\frac{a}{2}\ \text{なるとき}\ \ \varphi(x)=0,\ f(x)=0 \\ -\frac{a}{2}<x\leqq\frac{a}{2}\ \text{なるとき} \\ \qquad\varphi(x)=\frac{1}{a},\quad f(x)=\frac{x}{a}+\frac{1}{2} \\ x>\frac{a}{2}\ \text{なるとき}\ \ \varphi(x)=0,\quad f(x)=1 \end{array}\right\} \cdots(3\text{-}1)$$

$$\text{平均}：E(\Delta d)=\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x\,dx=0 \cdots\cdots(3\text{-}2)$$

$$\text{分散}：V(\Delta d)=\frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2dx=\frac{a^2}{12} \cdots\cdots(3\text{-}3)$$

$$\text{標準直径括約誤差}：\sigma(\Delta d)=\frac{a}{2\sqrt{3}} \cdots\cdots(3\text{-}4)$$

（ii）直径括約誤差の和―林木測定の際の直径合計値における括約誤差

宇野[1] の研究を準用すれば，

分布函数：

$$f_n(x)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k\binom{n}{k}T_n\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right] \cdots\cdots(3\text{-}5)$$

または，

$$f_n(x)=\frac{1}{a^n n!}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k\binom{n}{k}\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]^n \cdots\cdots(3\text{-}6)$$

ただし，$$T_n(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{n!}\cdots\cdots x>0\\ 0\ \cdots\cdots x\leqq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x}T_{n-1}(s)ds=T_n(x)$$

λ：$\frac{x}{a}+\frac{n}{2}$ の整数部分，　k：正の整数．

密度函数：

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k\binom{n}{k}T_{n-1}\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right] \cdots\cdots(3\text{-}7)$$

または，

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{a^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k\binom{n}{k}\left[x+(n-2k)\frac{a}{2}\right]^{n-1} \cdots\cdots(3\text{-}8)$$

ただし，$-\frac{na}{2}<x\leqq\frac{na}{2}$，

$\varphi_n(x)=0$，ただし，$x>\frac{na}{2}$，$x\leqq-\frac{na}{2}$．

$$\text{平均}：E(\Delta D)=0 \cdots\cdots(3\text{-}9)$$

$$\text{分散}：V(\Delta D)=\frac{na^2}{12} \cdots\cdots(3\text{-}10)$$

$$\text{標準誤差}：\sigma(\Delta d)=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{n}{3}} \cdots\cdots(3\text{-}11)$$

$n\to\infty$ なら，$\Delta(D)$ の分布は中心極限定理によつて正規分布　$N\left(0,\ \frac{na^2}{12}\right)$ に従う．

n 本の林木の平均直径の標準括約誤差は，

$$\sigma(\overline{d})_n=a/2\sqrt{3n} \cdots\cdots(3\text{-}12)$$

（b）断面積括約誤差

（i）単一の断面積括約誤差

断面積括約誤差を Δg，直径のそれを Δd とすると，

$$\Delta g=\frac{\pi}{4}\{2d\Delta d-(\Delta d)^2\}$$

＊　本章については文献（10）参照．

二乗項 $(\Delta d)^2$ を省略しないままで，Δg の正確な密度函数および分布函数を求めれば，

$$\varphi(y_i)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}13)$$

$$f(y_i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\left\{g_i^{\frac{1}{2}}-(g_i-y_i)^{\frac{1}{2}}\right\}\cdots(3\text{-}14)$$

平均：
$$E(\Delta g)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}\left(d_ia+\frac{a^2}{4}\right)}^{\frac{\pi}{4}\left(d_ia-\frac{a^2}{4}\right)} y(g_i-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$=-\frac{\pi a^2}{48}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}15)$$

分散：
$$V(\Delta g)=a^2\pi^2\left(\frac{d_i^2}{48}+\frac{a^2}{2880}\right)\fallingdotseq\frac{a^2\pi^2d_i^2}{48}\cdots(3\text{-}16)$$

標準誤差：
$$\sigma(\Delta g)\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{48}}\pi a d_i\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}17)$$

式 (3-16)，(3-17) は単一の直径括約誤差の分散 $\frac{a^2}{12}$ に誤差伝播の法則を適用して得られるものに等しい．

(ii) 断面積括約誤差の和—林木の総断面積括約誤差

(イ) 同一直径階に属する林木の断面積括約誤差の和

同一分布法則に従う独立な n 個の括約誤差の和の分布は，n が充分大なるときは，近似的に正規分布 $N\left(-\frac{n\pi a^2}{48},\ \frac{n\pi^2a^2d_i^2}{48}\right)$ に従う．実用上充分な n の大きさについては，$n>5$ とみればよいであろう．

(ロ) 種々の直径階に属する林木の断面積括約誤差の和

中心極限定理により近似的に，

$$N\left(-\frac{N\pi a^2}{48},\ \frac{\pi^2a^2}{48}\sum_{i=1}^{k}n_id_i^2\right),\quad ただし，\quad N=\sum_{i=1}^{k}n_i.$$

N の充分なる大きさは，通常の括約単位にあっては 5～6 以上，安全のためには 10 以上とみれば充分であろう．

信頼度 95 % における，平均の周りの総断面積括約誤差率の信頼限界は，

$$\varepsilon(\Delta G)_{\%}\fallingdotseq\frac{a}{\sqrt{G}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}18)$$

ただし，G：m^2 単位，a：cm 単位．

総断面積括約誤差の平均の林分断面積に対する百分率を $E(\Delta G)_{\%}$ とすれば，

$$E(\Delta G)_{\%}=-\frac{100a^2}{12d_m^2(1+C_d^2)}\cdots\cdots\cdots(3\text{-}19)$$

ただし，d_m：林木平均直径，C_d：直径の変動係数．

3. 正規型直径分布における括約誤差

(a) 直径括約誤差

林木の直径分布が正規分布 $N(d_m,\sigma^2)$ で表わされるとき，単一の直径括約誤差の密度函数は，

$$\varphi(z)=\frac{1}{A_i\sigma}e^{-\frac{(\sigma t_i-z)^2}{2\sigma^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}20)$$

ただし，
$$A_i=\int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

上式において，$v=\frac{z}{\sigma}$，$-\frac{a}{2\sigma}<v\leqq\frac{a}{2\sigma}$ とおけば，

$$\varphi(v)=\frac{1}{A_i}e^{-\frac{(t_i-v)^2}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}21)$$

分布函数：

$$f(z)=\frac{1}{A_i\sigma}\int_{-\frac{a}{2}}^{z}e^{-\frac{(\sigma t_i-s)^2}{2\sigma^2}}ds\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}22)$$

平均：
$$E(\Delta d)=\sigma E\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right),$$

$$\therefore\quad E_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)=t_i-\frac{\xi_{1i}}{A_i}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}23)$$

ただし，
$$\xi_{pi}=\int_{t_i-\frac{a}{2\sigma}}^{t_i+\frac{a}{2\sigma}}t^pe^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$0\leqq\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)$ のとき，

$$\xi_{pi}=\sqrt{2\pi}\left\{\theta_p\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)-\theta_p\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)\right\},$$

$\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)<0<\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)$ のとき，

$$\xi_{pi}=\sqrt{2\pi}\left\{\theta_p\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)+\theta_p\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)\right\},$$

$\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)\leqq 0$ のとき，

$$\xi_{pi}=\sqrt{2\pi}\left\{\theta_p\left(t_i-\frac{a}{2\sigma}\right)-\theta_p\left(t_i+\frac{a}{2\sigma}\right)\right\},$$

ここに θ_p は不完全正規確率函数で，

$$\theta_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x s^pe^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

α を正数とするとき，

p が奇数なら，$\theta_p(\alpha)=-\theta_p(-\alpha)$

p が偶数なら，$\theta_p(\alpha)=\theta_p(-\alpha)$．

分散：
$$V(\Delta d)=\sigma^2V\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right),$$

$$\therefore\quad V_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)=\frac{1}{A_i}\left(\xi_{2i}-\frac{1}{A_i}\xi_{1i}^2\right)\cdots(3\text{-}24)$$

式 (3-24) における数値計算の結果，$a/\sigma\leqq 1$ なら，t_i の値にかかわりなく，実用的に

$$V_i(\Delta d)\fallingdotseq\frac{a^2}{12}.$$

(b) 断面積括約誤差

(i) 単一の断面積括約誤差

密度函数：

$$\varphi(y_i)=\frac{1}{A_i\sigma\sqrt{\pi}}(g_i-y_i)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2(\sqrt{g_i-y_i}-\sqrt{g_m})^2}{\sigma^2\pi}} \quad \cdots\cdots(3\text{-}25)$$

ただし，$g_i=\frac{\pi}{4}d_i^2$，　$g_m=\frac{\pi}{4}d_m^2$

あるいは，

$$\varphi(w_i)=\frac{1}{A_i\sqrt{\pi}}(\eta_i-w_i)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2(\sqrt{\eta_i-w_i}-\sqrt{\gamma})^2}{\pi}} \quad \cdots\cdots(3\text{-}26)$$

ただし，$w_i=y_i/\sigma^2$，$\gamma=g_m/\sigma^2$，$\eta_i=g_i/\sigma^2$.

分布函数：

$$f(y_i)=\frac{1}{A_i\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{4}(d_ia+\frac{a^2}{4})}^{y_i}(g_i-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2(\sqrt{g_i-s}-\sqrt{g_m})^2}{\sigma^2\pi}}ds \quad \cdots\cdots(3\text{-}27)$$

$\frac{2(\sqrt{g_i-s}-\sqrt{g_m})}{\sigma\sqrt{\pi}}=t$　　とおけば，

$$f(t)=\frac{1}{A_i}\int_{t}^{t_i+\frac{a}{2}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

平　均：

$$E_i(\Delta g)=\frac{\pi}{4}[2d_iE_i(\Delta d)-V_i(\Delta d)-\{E_i(\Delta d)\}^2] \quad \cdots\cdots(3\text{-}28)$$

上式において，$V_i(\Delta d)+\{E_i(\Delta d)\}^2\doteqdot\frac{a^2}{12}$　とおきうるから，

$$E_i(\Delta g)\doteqdot-\frac{\pi a^2}{48}+\frac{\pi}{2}d_iE_i(\Delta d)$$

すなわち正規型直径分布における単一の断面積括約誤差の平均は，一様分布の場合のそれに対し，$\frac{\pi}{2}d_iE_i(\Delta d)$　だけ修正されるものと考えられる.

式 (3-28) を書きかえれば，

$$\left.\begin{aligned}E_i(\Delta g)&=\frac{\pi}{4}\left\{2d_mE_i(\Delta d)+\sigma^2\left(t_i^2-\frac{\xi_{2i}}{A_i}\right)\right\}\\E_i\left(\frac{\Delta g}{\sigma^2}\right)&=\frac{\pi}{4}\left\{2\left(\frac{d_m}{\sigma}\right)E_i\left(\frac{\Delta d}{\sigma}\right)+\left(t_i^2-\frac{\xi_{2i}}{A_i}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3\text{-}29)$$

分散：

$$V_i(\Delta g)=\frac{\pi^2d_m^2}{4}V_i(\Delta d)+\frac{\pi^2d_m\sigma^3}{4}\left(\frac{\xi_{3i}}{A_i}-\frac{\xi_{1i}\xi_{2i}}{A_i^2}\right)+\frac{\pi^2\sigma^4}{16}\left(\frac{\xi_{4i}}{A_i}-\frac{\xi_{2i}^2}{A_i^2}\right) \quad \cdots\cdots(3\text{-}30)$$

上式について数値計算の結果，一般実用域内において，一様分布におけると同一の近似式が成立することがわかる：

$$V_i(\Delta g)\doteqdot\frac{\pi^2d_i^2a^2}{48} \quad \cdots\cdots(3\text{-}31)$$

(ii)　断面積括約誤差の和—正規型直径分布における林木の総断面積括約誤差

一様分布の場合と同様に N が充分大なるときは，近似的に　$N(E(\Delta G),\ V(\Delta G))$，ここに　$E(\Delta G)$，$V(\Delta G)$ は：

平均：$E(\Delta G)\doteqdot N\pi a^2/48$ $\cdots\cdots(3\text{-}31)$

$$E(\Delta G)_{\%}\doteqdot\frac{100\,a^2}{12d_m^2(1+C_d^2)} \quad \cdots\cdots(3\text{-}32)$$

ただし，$C_d=\sigma/d_m$.

分散：

$$V(\Delta G)\doteqdot\frac{N\pi^2a^2d_m^2(1-1.5C_d^2)}{48} \quad \cdots\cdots(3\text{-}33)$$

あるいは式 (3-31) より，

$$V(\Delta G)\doteqdot\frac{\pi^2a^2}{48}\sum_{i=0}^{k}n_id_i^2=\frac{N\pi^2a^2d_m^2(1+C_d^2)}{48} \quad \cdots\cdots(3\text{-}34)$$

この両式はいずれも近似式ではあるが，式 (3-33) の方がより正確であろう．したがつて一様分布の場合の分散式 (3-34) を適用すれば僅かに過大推定となる．実際の誤差評価には式 (3-34) を用いる方が，一様分布と統一的にとり扱う意味において便利である．

（c）実　験　例

3つのスギ人工林について以上の理論を実証した．

4.　Meyer 型直径分布における括約誤差

（a）直径括約誤差

Meyer 型直径分布

$$\varphi(x)=ke^{-\alpha x}$$

ただし，x：直径，k,α：常数，

における直径括約誤差 Δd の密度函数は，

$$\varphi(z)=\frac{1}{A_i}e^{-\alpha(d_i-z)} \quad \cdots\cdots(3\text{-}35)$$

ただし，　$A_i=\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha(d_i-\frac{a}{2})}-e^{-\alpha(d_i+\frac{a}{2})}\right)$

平均：$E(\Delta d)=-\frac{1}{\alpha}+\frac{a}{2}+\frac{a}{e^{\alpha a}-1}$ $\cdots\cdots(3\text{-}36)$

分散：$V_i(\Delta d)=\frac{a^2}{4}-\frac{2}{\alpha}E(\Delta d)-\{E(\Delta d)\}^2$　(3-37)

数値計算の結果は，α の値の如何にかかわらず，充分近似的に，一様分布と同じく，$V_i(\Delta d)\doteqdot a^2/12$ とおきうることを示す．

（b）断面積括約誤差

（i）単一の断面積括約誤差

$$\varphi(y_i)=\frac{1}{A_i\sqrt{\pi}\sqrt{g_i-y_i}}e^{-\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{g_i-y_i}} \quad \cdots\cdots(3\text{-}38)$$

平均：$E_i(\Delta g)=\frac{\pi}{4}\left\{2E_i(\Delta d)\left(d_i+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{a^2}{4}\right\}$ $\cdots(3\text{-}39)$

分散： $V_i(\Delta g)=V(\Delta d)\dfrac{\pi^2}{2}\left[\dfrac{d_i^2}{2}+\dfrac{d_i}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}\right]$

$$-\frac{\pi^2E(\Delta d)}{2\alpha^2}\left[d_i+\frac{1}{\alpha}-\frac{E(\Delta d)}{2}\right]\cdots(3\text{-}40)$$

数値計算の結果は，ここでもまた充分近似的に一様分布と同一の式が成立することを示す．

$$V_i(\Delta g)\fallingdotseq\frac{\pi^2a^2d_i^2}{48}$$

(ii) 断面積括約誤差の和— Meyer 型直径分布に従う林木の総断面積括約誤差

中心極限定理により，$N(E(\Delta G),\ V(\Delta G))$に従う．

平均：$E(\Delta G)=\dfrac{N\pi}{4}\left[2E(\Delta d)\left(d_m+\dfrac{1}{\alpha}\right)-\dfrac{a^2}{4}\right]$，

ただし，$d_m=\dfrac{\sum n_id_i}{N}$

しかるに，$\dfrac{\pi}{4}\left[2E(\Delta d)\left(d_m+\dfrac{1}{\alpha}\right)-\dfrac{a^2}{4}\right]=E_m(\Delta g)$

は林木平均直径 d_m に対する断面積括約誤差の平均であるから，

$$E(\Delta G)=NE_m(\Delta g)\ \cdots\cdots(3\text{-}41)$$

$$E(\Delta G)\%=\frac{\left[2E(\Delta d)\left(d_m+\dfrac{1}{\alpha}\right)-\dfrac{a^2}{4}\right]100}{d_m^2(1+C_d^2)}\cdots\cdots(3\text{-}42)$$

分散：一様分布の場合と同じく近似的に，

$$V(\Delta G)\fallingdotseq\frac{\pi^2a^2}{48}\sum_{i=1}^{k}n_id_i^2=\frac{\pi a^2G}{12}$$

(C) 実 験 例

不規則下降型ではあるが，比較的 Meyer 型に近いと思われるスギ天然生林について，上述の理論を実証した．

5. 括約誤差の評価

括約誤差の評価に関する限り，林分の直径分布は正規型，Meyer 型および一様型に大別することが可能である．したがって現実の毎木調査における括約誤差の評価に当っては，

(i) 同令一斉林は正規型，

(ii) 比較的規則的な下降型を示す天然生林は Meyer 型，

(iii) 不規則な林分または本数が少なくて直径分布の判別が困難な林分は一様分布としてとり扱ってよい．

第4章 毎木調査における総合的誤差

前章までに個別にとり扱われてきた種々の要素誤差の総合を試みる．

1. 総偶然誤差

前章までとは別に，総合誤差考察の立場からあらためて次のように定義する．

偶然測定誤差 $\Delta_Z=d'-d$，括約誤差 $\Delta_A=d''-d'$．

総偶然誤差 $\Delta_T=\Delta_Z+\Delta_A=d''-d$．

ただし，d：直径真値，d'：第1次測定値（括約前の値），

d''：第2次測定値（括約後の値）．

ここに Δ_Z と Δ_A とは互いに独立とみなされる．

（a）単一の直径誤差

$$\sigma_{Td}^2=\sigma_{Zd}^2+\sigma_{Ad}^2\cdots\cdots(4\text{-}1)$$

ただし，σ_{Td}^2：Δ_T の分散，σ_{Zd}^2：Δ_Z の分散．

σ_{Ad}^2：Δ_A の分散（前章での $V(\Delta d)$）．

$$\sigma_{Td(\%)}=\sqrt{(\sigma_{Zd\%})^2+(\sigma_{Ad\%})^2}\ \cdots\cdots(4\text{-}2)$$

（b）単一の断面積誤差

Δ_T に基づく断面積の誤差 Δ_{Tg} の分散を σ_{Tg}^2 とすると，

$$\sigma_{Tg}^2\fallingdotseq\frac{\pi^2}{4}d^2(\sigma_{Zd}^2+\sigma_{Ad}^2)\ \cdots\cdots(4\text{-}3)$$

$$\sigma_{Tg(\%)}=2\sqrt{(\sigma_{Zd\%})^2+(\sigma_{Ad\%})^2}\ \cdots\cdots(4\text{-}4)$$

括約単位が大きい場合には，断面積括約誤差の平均を考えねばならない（前章参照）．

（c）断面積合計の誤差—林木断面積における総誤差

断面積合計における総誤差 Δ_{TG} の分散は，

$$\sigma_{TG}^2=\sigma_{ZG}^2+\sigma_{AG}^2\ \cdots\cdots(4\text{-}5)$$

ただし，第2，3章の所論から，

$$\sigma_{ZG}^2=\left\{\frac{2\sigma(\%)}{100}\right\}^2\sum n_ig_i^2$$

$$\sigma_{AG}^2=\frac{\pi^2a^2}{48}\sum n_id_i^2=\pi G\frac{a^2}{12}$$

また，

$$\sigma_{TG(\%)}=\sqrt{(\sigma_{ZG\%})^2+(\sigma_{AG\%})^2}\ \cdots\cdots(4\text{-}6)$$

ただし，

$$\sigma_{ZG(\%)}\fallingdotseq2\sigma(\%)\sqrt{\frac{1+4C_d^2}{N}}$$

$$\sigma_{AG(\%)}\fallingdotseq\frac{50a\sqrt{\pi}}{\sqrt{3G}}=\frac{100a}{d_m\sqrt{3N(1+C_d^2)}}$$

これより，Nが充分大なら総偶然誤差はほとんど問題とするに足りないことがわかる．

総偶然誤差の平均の偏りとしては総断面積括約誤差の平均のみを考慮すれば充分であろう．これらの平均を中心として，信頼度95％における総偶然誤差の推定限界は，

$$\varepsilon_{T(\%)}=\sqrt{(\varepsilon_{ZG\%})^2+(\varepsilon_{AG\%})^2}\ \cdots\cdots(4\text{-}7)$$

ただし第2，3章の所論より，

$$\varepsilon_{ZG(\%)}\fallingdotseq4\sigma(\%)\sqrt{\frac{1+4C_d^2}{N}}$$

$$\varepsilon_{AG(\%)}\fallingdotseq\frac{100a\sqrt{\pi}}{\sqrt{3G}}=\frac{200a}{d_m\sqrt{3N(1+C_d^2)}}\fallingdotseq\frac{100a}{\sqrt{G}}$$

表 (4-1) 毎木調査による林分断面積の誤差率 (%)

誤差の種類	直径分布 一様分布 推定量	直径分布 正規型分布 推定量	直径分布 Meyer 型分布 推定量
過失誤差 1. 読み違え	(?)	(?)	(?)
過失誤差 2. 聞き違え	(?)	(?)	(?)
過失誤差 3. 記帳の誤り	(?)	(?)	(?)
過失誤差 4. 測り落し		−2 (0.5〜0.7)	
過失誤差 5. 二重測り		+0.0 (微小)	
6. 輪尺誤差		$-\delta/l$ (−1〜−3)	
7. 偶然測定誤差		$\pm 4\sigma(\%)\sqrt{\frac{1+4C_d^2}{N}}$, $\sigma(\%)=1\sim4.$	
8. 括約誤差 平均の偏り	$-\frac{100a^2}{12d_m^2(1+C_d^2)}$	$+\frac{100a^2}{12d_m^2(1+C_d^2)}$	$\frac{\left[2E(\Delta d)\left(d_m+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{a^2}{4}\right]100}{d_m^2(1+C_d^2)}$
偶然変動		$\pm\frac{200a}{d_m\sqrt{3N(1+C_d^2)}}$	

注. 偶然測定誤差率および括約誤差のうち偶然変動に関する部分は c. c. 95 %の最大誤差率とした.

2. 毎木調査における誤差の総括

毎木調査の最終的結果たる林分胸高断面積における誤差率を誤差の種類別に評価してみると表 (4-1) のようになる. これらの誤差のうち, 比較的明確な評価をなし得るのは括約誤差だけで, 他の誤差は経験から推定し得るに過ぎない.

3. 括約単位の問題

括約誤差が偶然測定誤差その他の誤差と独立であるときは, 括約単位は林分胸高断面積括約誤差の許容範囲内において定められ得る.

式 (3-18) より,

$$a \fallingdotseq \sqrt{G}\ \varepsilon(\Delta G)\% \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}8)$$

$$G=\frac{N\pi}{4}\ \frac{d_m^2}{10000}(1+C_d^2)$$

とおけば,

$$\sqrt{G}=\frac{d_m}{200}\sqrt{N\pi(1+C_d^2)} \fallingdotseq 0.009\sqrt{N}\cdot d_m$$

故に,

$$a \fallingdotseq 0.009\cdot\sqrt{N}\cdot d_m\cdot\varepsilon(\Delta G)\% \cdots\cdots\cdots (4\text{-}9)$$

以上の関係は直径分布の如何にかかわらず充分なる近似度をもつて成立する.

式 (4-9) によれば, 平均直径許容誤差率を一定としても, 本数が多くなれば a は際限なく大きくなる. すなわち上式では括約誤差の平均値囲りの偶然変動部分のみを誤差として考慮し, 平均値自体の偏りを考慮していないからである. それは第3章で述べたようにして与えられるにしても, 括約単位が測定直径に対してあまりに大きいことは測定の意義を失するものであるから, 大きくしても $a/d_m<\frac{1}{4}\sim\frac{1}{6}$ の範囲内にとどめるべきであろう. 現行の 1〜5 cm の括約単位は一般に充分満足すべき林分胸高断面積を与え得るといえる.

結　　論

毎木調査の誤差の中で, もつとも重視さるべきものは測り落しの誤差および輪尺誤差であつて, 偶然測定誤差および括約誤差等は, 単木または少数木の測定の場合は別として, 一般の林分胸高断面積の精度にはほとんど影響を及ぼさない. 正確な輪尺と, 測者の注意がとくに要請されるゆえんである.

本論文においてとり扱つたのは毎木調査による林分胸高断面積の誤差であつた. これに基づく林分材積あるいは林分成長量の誤差は, それらの推定方法によつて異なるべきであるが, いずれの方式をとろうとも, 以上の結果に基づいてこれらの誤差を推定することは容易であろう. 林分胸高断面積によらない林分材積の推定方式, 例えば材積表法においても, 本論文の過程で明らかにされた単木直径あるいは断面積についての誤差の評価基準は, 推定された林分材積の誤差を評価する上に, 有力な根拠を提供するものと信ずる.

謝辞：本研究の遂行ならびにとりまとめにあたり, 終始御指導と御鞭撻を賜わつた京都大学佐藤弥太郎名誉教授, 岡崎文彬教授, 柴田信男助教授, 京都府立大学重本勝教授, ならびに試料蒐集にあたつて直接間接に御協力を頂いた多くの方々に対し, 衷心感謝の意を表する.

参 考 文 献

1. 宇野利雄：数値計算論，1940.
2. 岡崎文彬：照査法と林木調査，林業技術，102，103．1950.
3. 〃 ：照査法の実態，1951.
4. 〃 ：蓄積と成長量の正しい測り方，1951.
5. 岡崎文彬，大隅真一：照査法の成長量査定に対する括約誤差の影響について，第63回日林講，1954.
6. 岡崎文彬，菅原 聰 etc. ：国有林野の蓄積ならびに成長量査定における精度と功程に関する研究調査報告，1958.
7. 大隅真一：毎木調査の誤差に関する研究，第1報 第61回日林講，1952.
8. 〃 ：同第2報，第2回日林関西支部講，1952.
9. 〃 ：同第3報，第62回日林講，1953.
10. 〃 ：括約誤差に関する研究，京大演報，第24号，1954.
11. 〃 ：幹形に関する研究（1），日林誌，41（12）．1959.
12. 〃 ：林分材積調査の時間分析，京府大学術報告，農学，第12号，1960.
13. 〃 ：林木の直径分布について，京府大演習林集報，第5号，1961.
14. 片山茂樹，後藤 久：毎木調査による林分の材積測定に関する功程，経費ならびに誤差につきて，九大演報，第8号，1936.
15. 近藤正已：林業技術のための推計学入門，1959.
16. 佐藤良一郎：数理統計学概論，増訂版．1948.
17. 菅原 聰：毎木調査における括約誤差について，信州大学農学部紀要，第2巻，第1号．1959.
18. 清野 要：吉田正男（1930）より引用.
19. 高田和彦：毎木調査による材積の誤差について，九大演報，1955.
20. 高田和彦：最近の測樹学における林分材積調査法の傾向，森林計画研究会報，第62号．1959.
21. 統計科学研究会：新編統計数値表．1952.
22. 東洋経済新報社：統計学辞典．1953.
23. 中山博一：林木材積測定学．1957.
24. 北海道林務部道有林課：毎木調査における偶然誤差，第62回日林講．1953.
25. 前沢完次郎：胸高断面積の括約誤差について，日林誌，35（5）．1953.
26. 吉田正男：測樹学要論，1930.
27. Knuchel, H.: Ueber Bestandeskluppierungen. Schw. Zeitschr. f. Forstw. 1925.
28. 〃 : Ueber die Bildung der Durchmesserstufen bei Bestandesaufnahmen. Allg. Forst-u. Jagdz. 1929.
29. 〃 : Zur Bildung der Durchmesserstufen bei Einrichtungsarbeiten, Schw. Zeitschr. f. Forstw. 1930.
30. 〃 : Ueber Stärkestufen-und Stärkeklassenbildung. Schw. Zeitschr. f. Forstw. 1932.
31. Meyer, H. A.: Eine mathematisch-statistische Untersuchung über den Aufbau des Plenterwaldes. Schw. Zeitschr. f. Forstw. 1933.
32. 〃 : Die rechnerischen Grundlagen der Kontrollmethoden. 1934.
33. 〃 : Forest mensuration. 1953.
34. Prodan, M.: Messung der Waldbestände. 1950.
35. Tirén, L.: Ueber Grundflächenberechnung und ihre Genauigkeit, Meddelanden från statens. 1929.
36. Tischendorf, W.: Lebrbuch der Holzmassenermittlung. 1927.

Summary

The paper concerns the problems in the analysis and evaluation of the errors affecting the determination of the stand basal area in the complete inventory.

It was concluded from the studies that the most serious errors were caused by failure to measure some trees or by using poorly adjusted calipers, and that the accidental error and the one due to the rounding off of the diameter had, in general, little influence on the accuracy of the calculated stand basal area.