京都府立大学学術報告（理学・生活科学・福祉学）第15号A系列1頁（1964年10月）

不変元についての注意

大　塚　香　代

Note on invariants

KAYO OTSUKA

Vを affine 多様体，Gを連結線型代数群とし，Gが rational にVに作用しているとして$\{P^g | g \in G, P \in V\}$を考える．ここにおいて $H_P = \{g | P^g = P\}$ とおくと $\{P^g | g \in G\} \cong G/H_P$ である．今Gの一つのBorel 部分群をBとするとき次のことはよく知られている．

補助定理1. H_PがBを含むときその時に限りG/H_Pは complete である．

定理1. H_PがBを含むならH_PはGに一致する．

証明. H_PがBを含むから補助定理1により G/H_P は complete である．一方 $\{P^g | g \in G\}$ なる orbit は affine の orbit であるから quasi-affine である．従つて $\{P^g | g \in G\}$ は一点のみよりなる．即ち $G = H_P$.

次にKをGの universal domain とし $R = K[f_1, f_2, \cdots f_n]$ をK上のVの座標環とする．このとき次の定理がなり立つ．

定理2. B-不変なRの元をfとするとき，fは又G-不変である．

証明　$\sum f^g K$ なる表現加群は有限で，これをMとおくとき $M = \sum_{i=1}^{n} u_i K$ $u_1 = f$ と仮定してよい．ここにu_iは一次独立である．即ちGの作用が rational であるからn次元の affine space に作用しているとみられる．今$u_1 = f$の G-orbit を考えるとそれはG/H_fに同型である．ただしH_fはfを動かさないGの元の集合である．一方fはB-不変なRの元であることにより $H_f \subseteq B$. 従つて定理1により $G = H_f$. 即ちfはG-不変な元である．

次にGを行列群，Vを affine 多様体としGをVに作用させる(rational)．今HをGの部分群，B_HをHの Borel部分群とし，更にVで正則な有理函数の作る環をRとする．定理1によりB_H-不変なRの元は又H-不変であることがわかる．所が一方H-不変な，且つGで regular な函数がG/Hで regular な函数であるから，従つて G/B_H で到る所正則な函数が存在すれば G/H 上でも又至る所正則な函数が存在することがわかる．即ち

定理2. G/B_H 上で到る所正則な定値をとらない函数が存在するときそのときに限り G/H 上でも到る所正則な定値をとらない函数が存在する．

今Gを群とし $R = K[x_1, x_2, \cdots x_n]$ のK-自己同型群をひきおこすものとする．$\sum_{\sigma \in G} f^{\sigma} K$ ($\forall f \in R$) を有限なK-加群と仮定するとき$\sum_{i, \sigma} x_i^{\sigma} K$は又有限生成のK-加群であつてその生成元を$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$とすれば$R = K[y_1, \cdots, y_n]$となる．今 $M = \sum y_i K$ とおき，Gをこれに作用させて考える即ちGがn次元の affine 空間に作用している行列群であるとして考えることが出来る．これよりGが rational に働いている場合と同様の結果が得られる．今GのBorel部分群をB，fをB-不変なRの元とし更にG_0をGの連結成分とすればfはG_0-不変になる．ここでG/G_0の代表元を$\sigma_0 = 1, \sigma_1, \cdots, \sigma_t$とすれば$\prod_i f^{\sigma_i}$はG-不変になる．

Summary

Let V be an affine variety and let G be a connected linear algebraic group acting on V in the usual sense. Let $R = K[f_1, f_2, \cdots, f_n]$ be a coordinate ring of V.

Then our main result is that : When G acts rationally, an element f of R is G-invariant if and only if f is B-invariant with a suitable Borel sub group B of G.